Письма в ЖЭТФ, том 112, вып. 6, с. 394 – 400 © 2020 г. 25 сентября

Ляпуновская экспонента в задаче Уитни со случайной накачкой

Н. А. Степанов[+∗×1)], *М. А. Скворцов*[+∗1)]

[+]*Сколковский институт науки и технологий, 121205 Москва, Россия*

[∗]*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, 142432 Черноголовка, Россия*

[×]*Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", 101000 Москва, Россия*

Поступила в редакцию 20 августа 2020 г.
После переработки 20 августа 2020 г.
Принята к публикации 20 августа 2020 г.

Мы рассматриваем статистические свойства непадающей траектории в задаче Уитни о перевернутом маятнике, возбуждаемом внешней силой. В случае, когда внешняя сила является белым шумом, мгновенная функция распределения угла маятника и его скорости на бесконечном временном интервале была найдена в нашей недавней работе с помощью трансфер-матричного анализа суперсимметричной теории поля. В настоящей публикации мы обобщаем наш подход на случай конечных временных интервалов и многоточечных корреляционных функций. С помощью развитого формализма вычислена ляпуновская экспонента, определяющая скорость затухания корреляций на непадающей траектории.

DOI: 10.31857/S1234567820180093

1. Балансирование перевернутого маятника, находящегося под действием заданной зависящей от времени горизонтальной силы $f(t)$, – это знаменитая математическая задача, сформулированная Курантом и Роббинсом в книге "Что такое математика?" (первое издание в 1941 г.) [1], где ее авторство было приписано Уитни. Используя довольно общие математические аргументы, основанные на теореме о среднем значении, они показали, что для любой силы $f(t)$, действующей на конечном временном интервале $[0,T]$, можно так выбрать начальное положение маятника в верхней полуплосткости, что он будет оставаться в верхней полуплоскости на протяжении дальнейшей эволюции при всех $t \in [0,T]$. Существование *непадающей траектории* (НПТ) в задаче Уитни было предметом непрекращающихся дебатов в математической литературе [2, 3], в результате которых исходные аргументы Куранта и Роббинса были критически проанализированы и уточнены. Свежий интерес к задаче о перевернутом маятнике связан с именем Арнольда, с точки зрения которого в 2002 г. эта задача еще ждала строгого решения [4]. В 2014 г. Полехин представил доказательство существования НПТ, используя топологический принцип Важевского [5]. Эта работа вызвала ряд публикаций, обобщивших его подход и предложивших новые топологические методы [6–8]. Хорошие обзоры истории задачи Уитни можно найти в статьях [8, 9].

1)e-mail: stepanov@itp.ac.ru; skvor@itp.ac.ru

В недавней работе нами была разработана теория статистического описания *никогда не падающей траектории* (ННПТ) перевернутого маятника под действием случайной силы [10]. Никогда не падающая траектория может быть рассмотрена как предел непадающих траекторий в задаче Уитни при стремлении длины T временного интервала к бесконечности. Концепция ННПТ проиллюстрирована на рис. 1, где построены численные решения краевой задачи для уравнения маятника (угол θ отсчитывается от вертикали)

$$\ddot{\theta} = \omega^2 \sin\theta + f(t)\cos\theta \tag{1}$$

с различными начальными $\theta(0) = \theta_1$ и конечными $\theta(T) = \theta_2$ значениями и достаточно быстро меняющейся силой $f(t)$. Для любых $\theta_{1,2}$ в полосе $-\pi/2 < \theta_{1,2} < \pi/2$ непадающее решение ($-\pi/2 < \theta(T) < \pi/2$) этой краевой задачи существует и единственно [10]. По мере того, как θ_1 и θ_2 пробегают все возможные значения в полосе, множество соответствующих НПТ образуют пучок, показанный цветом на рис. 1. Этот пучок сужается при отходе от края, становясь экспоненциально тонким в середине интервала при больших T. В пределе $T \to \infty$, когда маятник нужно балансировать на всей действительной оси, пучок НПТ для задачи Уитни, определенной на конечном интервале, становится бесконечно тонким и определяет единственную *никогда не падающую траекторию*, являющуюся функционалом заданной силы $f(t)$.

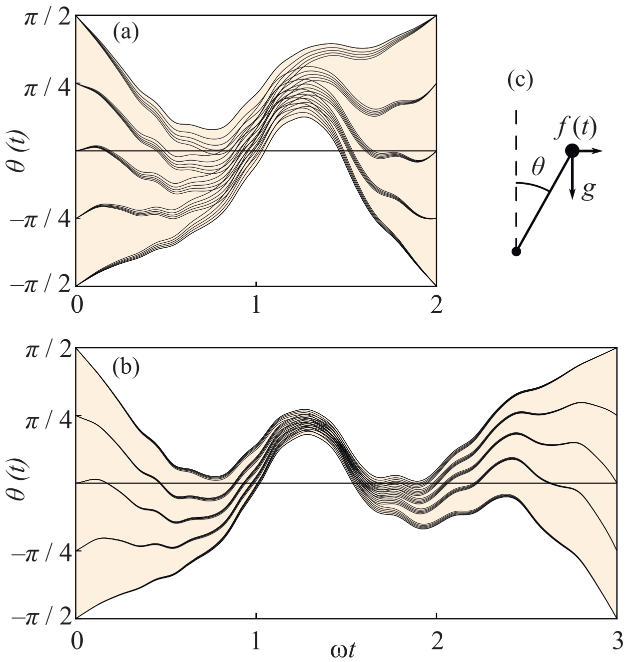

Рис. 1. (Цветной онлайн) Примеры непадающих траекторий для уравнения движения маятника (1), рассматриваемого на двух временных интервалах: (a) – $T = 2/\omega$ и (b) – $T = 3/\omega$. Для любого выбора θ_1 и θ_2 в верхней полуплоскости ($|\theta| < \pi/2$) существует единственное непадающее решение, удовлетворяющее граничным условиям $\theta(0) = \theta_1$ и $\theta(T) = \theta_2$. На графиках потроено по 25 таких траекторий с $\theta_{1,2} = (-1, -0.5, 0, 0.5, 1) \times \pi/2$. В обоих случаях возбуждающая сила выбрана в виде $f(t) = 4\sum_{n=1}^{40} \cos(k\omega t + k^4)$. (c) – Перевернутый маятник под действием горизонтальной силы

Статистические свойства НПТ в случае, когда возбуждающая сила представляет собой гауссов белый шум с коррелятором

$$\langle f(t)f(t')\rangle = 2\alpha\delta(t - t'), \tag{2}$$

были изучены нами в работе [10], где мы вычислили одновременную фукнцию распределения $P(\theta, p)$ угла θ и его скорости $p = \dot{\theta}$. Наш подход основан на суперсимметричной теоретико-полевой формулировке стохастической динамики, предложенной в работах Паризи и Сурла [11–13], которая позволяет провести усреднение по случайной силе в самом начале вычислений. Существенно, что для рассматриваемой задачи метод Паризи–Сурла свободен от проблемы знака фермионного детерминанта в силу единственности НПТ. Используя идею сведения одномерного функционального интеграла к эффективной квантовой механике [14], нам удалось выразить функцию распределения $P(\theta, p)$ через нулевую моду трансфер-матричного гамильтониана, который сводится к оператору Фоккера–Планка с особым видом граничных условий, обеспечивающих невыход траекторий из полосы.

В настоящей публикации мы развиваем идеи, заложенные в работе [10], и рассматриваем круг вопросов, связанных с ляпуновской экспонентой для НПТ. Ляпуновская экспонента определяет как закон сходимости НПТ на конечном временном интервале к ННПТ на бесконечном временном интервале (см. рис. 1), так и затухание разновременных корреляторов на ННПТ. С технической точки зрения, наш результат состоит в описании всего спектра трансфер-матричного гамильтониана, в то время как в работе [10] была исследована только его нулевая мода. На этом языке ляпуновская экспонента определяется энергией первого возбужденного состояния. Развитая теория позволяет вычислять любые корреляционные функции на НПТ на бесконечном, полубесконечном и конечных интервалах.

Мы показываем, что ляпуновская экспонента в задаче Уитни с накачкой в виде белого шума (2) может быть записана в виде

$$\lambda = \omega g(\alpha/\omega^3), \tag{3}$$

где функция $g(x)$ имеет следующие асимптотики:

$$g(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{3}{8}x - \dfrac{525}{1024}x^2 + \ldots, & x \ll 1; \\ 0.66\, x^{1/3} + 0.26 + 0.30\, x^{-1/3} \ldots, & x \gg 1. \end{cases} \tag{4}$$

В отсутствие накачки ($\alpha = 0$) ляпуновская экспонента $\lambda = \omega$ определяется экспоненциальной неустойчивостью траекторий вблизи верхнего положения маятника. При слабой накачке ($\alpha/\omega^3 \ll 1$) типичный угол НПТ имеет порядок $\theta \sim (\alpha/\omega^3)^{1/2}$ [10], и нелинейность уравнения (1) приводит к увеличению ляпуновской экспоненты, которая может быть разложена в асимптотический ряд по степеням малого параметра α/ω^3. Наконец, при сильной накачке ($\alpha/\omega^3 \gg 1$) ляпуновская экспонента выходит на предельное значение $\lambda \approx 0.66\,\alpha^{1/3}$. Найденная численно зависимость ляпуновской экспоненты от параметра α/ω^3 показана на рис. 2.

2. Согласно подходу, развитому в работе [10], статистические свойства НПТ выражаются через двухкомпонентную "волновую функцию" $\hat{\Psi}(\theta, p) = (\Psi, \Phi)^T$, чья эволюция дается уравнением Шредингера во мнимом времени с соответствующим трансфер-матричным гамильтонианом:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\Psi\\ \Phi\end{pmatrix} = -\mathcal{H}\begin{pmatrix}\Psi\\ \Phi\end{pmatrix}, \qquad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} L & -1 \\ V_2 & L \end{pmatrix}, \tag{5}$$

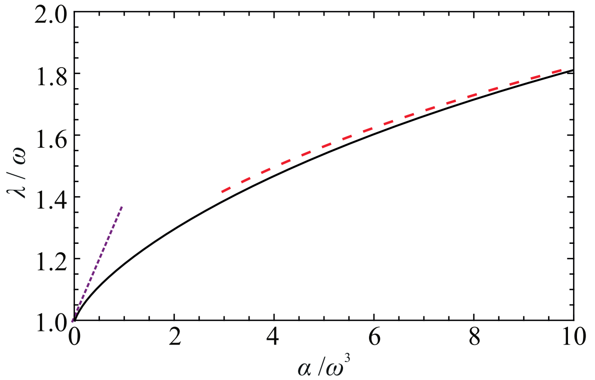

Рис. 2. (Цветной онлайн) Зависимость ляпуновской экспоненты для НПТ от силы накачки, измеряемой параметром α/ω^3. Пунктиром показана линейная часть асимптотики при малых α, а штриховой линией – первые три члена разложения (4) на больших x

где L – оператор Фоккера–Планка для задачи Крамерса [15]:

$$L = p\partial_\theta + \omega^2 \sin\theta\, \partial_p - \alpha \cos^2\theta\, \partial_p^2, \tag{6}$$

а потенциал V_2 имеет вид:

$$V_2 = -\omega^2 \cos\theta - \alpha \sin 2\theta\, \partial_p. \tag{7}$$

В работе [10] мы исследовали одноточечную корреляционную функцию ННПТ на бесконечном временном интервале, которая определяется нулевой модой $\hat{\Psi}_0$ гамильтониана $\mathcal{H}$. Нахождение нулевой моды значительно упрощается благодаря наличию симметрии Бекки–Руэ–Стора–Тютина (БРСТ) действия стохастической динамики в представлении Паризи и Сурла [13], что позволяет выразить обе компоненты $\hat{\Psi}(\theta, p)$ через скалярный суперпотенциал $\psi(\theta, p)$ посредством

$$\Psi = \partial_p \psi, \qquad \Phi = -\partial_\theta \psi. \tag{8}$$

При этом временна́я эволюция суперпотенциала ψ определяется оператором Фоккера–Планка L:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -L\psi. \tag{9}$$

Однако редукция (8) не работает ни для вычисления разновременных корреляционных функций ННПТ, ни для описания статистики НПТ на интервалах с краем. В первом случае БРСТ симметрия нарушается операторами физически наблюдаемых величин, действующих одинаково на Ψ и Φ компоненты волновой функции, а во втором – БРСТ-несимметричным начальным условием на краю интервала (см. уравнение (10) ниже). В обоих случаях для описания статистики НПТ необходимо работать с двухкомпонентной волновой функцией (Ψ, Φ) и понимать свойства гамильтониана $\mathcal{H}$.

Обсудим, как выглядит начальное условие для волновой функции на краю интервала. Для обеспечения единственности НПТ необходимо зафиксировать значение θ на краю. (Вообще говоря, можно задавать значение $\dot{\theta}$ или даже линейную комбинацию θ и $\dot{\theta}$, но для простоты будем считать, что фиксирован угол.) По построению, волновая функция $\hat{\Psi}$ тесно связана со статистической суммой суперсимметричного функционального интеграла [10]. На краю интервала она не может содержать грассмановых переменных, что приводит к занулению компоненты Φ. Таким образом, волновая функция на краю интервала, где зафиксировано значение $\theta = \theta_0$, имеет вид

$$\hat{\Psi}^{(\mathrm{b})}_{\theta_0} = \begin{pmatrix} \omega^{-1}\, \delta(\theta - \theta_0) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Рассмотрим краевую задачу на интервале $[T_{\mathrm{L}}, T_{\mathrm{R}}]$ с граничными условиями $\theta(t_{\mathrm{L}}) = \theta_{\mathrm{L}}$ и $\theta(t_{\mathrm{R}}) = \theta_{\mathrm{R}}$. Суть сведения функционального интеграла Паризи–Сурла к квантовой механике (5) заключается в том, что корреляционная функция $\langle O_1(t_1) O_2(t_2) \ldots \rangle$ физических величин O_i в моменты времени t_i $(t_1 < t_2 < \ldots)$ может быть представлена как матричный элемент

$$\langle \hat{\Psi}^{(\mathrm{b})}_{\theta_{\mathrm{R}}} | \ldots O_2(t_2) e^{-\mathcal{H}(t_2 - t_1)} O_1(t_1) e^{-\mathcal{H}(t_1 - t_{\mathrm{L}})} | \hat{\Psi}^{(\mathrm{b})}_{\theta_{\mathrm{L}}} \rangle, \tag{11}$$

где скалярное произведение двух волновых функций определено как [10]

$$\langle \hat{\Psi} | \hat{\Psi}' \rangle = \int d\theta\, dp\, [\Psi(\theta, p) \Phi'(\theta, -p) + \Phi(\theta, p) \Psi'(\theta, -p)]. \tag{12}$$

В работе [10] мы изучали одновременную совместную функцию распределения $P(\theta, p)$ угла и скорости для ННПТ, которая соответствует оператору $O = \delta(\theta - \theta_0)\delta(p - p_0)$. Заменяя $\hat{\Psi}_{L,R}$ на нулевую моду и используя уравнение (8), можно выразить $P(\theta, p)$ через скобку Пуассона от суперпотенциала ψ:

$$P(\theta, p) = \big\{ \psi(\theta, p), \psi(\theta, -p) \big\}_{\theta, p}. \tag{13}$$

Гамильтониан $\mathcal{H}$ в уравнении (5), равно как и оператор Фоккера–Планка (6), является неэрмитовым. Такие операторы, вообще говоря, могут не иметь полной системы собственных функций. Известно, однако, что в присутствии вязкости оператор Фоккера–Планка может быть приведен к диагональному виду [15], что позволяет построить систему биортогональных собственных функций и работать с ними практически как с собственными функциями эрмитового оператора [16]. В нашем случае вязкость отсутствует, поэтому следует ожидать, что операторы $\mathcal{H}$ и L приводятся к нормальной жордановой форме. Следствием этого является не простое экспоненциальное затухание корреляторов при $t \to \infty$, а появление дополнительных степеней времени (как это видно, например, в выражении (30)).

3. Для иллюстрации развитого подхода остановимся подробно на случае *слабого шума* ($\alpha/\omega^3 \ll 1$), когда жорданова структура операторов $\mathcal{H}$ и L может быть исследована аналитически. Начнем с оператора Фоккера–Планка. В рассматриваемом пределе отклонение маятника от вертикали мало ($\theta \ll 1$), и оператор (6) может быть заменен на

$$L = p\partial_\theta + \omega^2\theta\partial_p - \alpha\partial_p^2. \tag{14}$$

Нулевая мода этого оператора, отвечающая ННПТ, имеет вид [10]

$$\psi_0(\theta, p) = \mathrm{erf}(z)/2, \tag{15}$$

где мы ввели "голоморфную" и "антиголоморфную" координаты, отличающиеся знаком импульса:

$$z = \kappa\,(p - \omega\theta), \quad \overline{z} = -\kappa\,(p + \omega\theta), \tag{16}$$

где $\kappa = \sqrt{\omega/2\alpha}$. Спектр оператора (14) может быть найден с помощью тождества $[L, \partial_z] = \omega\partial_z$, что позволяет получать собственные функции, последовательно дифференцируя нулевую моду по z. Таким образом находим собственную функцию n-го возбужденного состояния ($n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$) с энергией $\epsilon_n = n\omega$:

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} H_{n-1}(z) e^{-z^2}, \tag{17}$$

где $H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} d^n e^{-z^2}/dz^n$ – полиномы Эрмита (в физическом определении). Однако построенные таким образом функции $\psi_n(\theta, p)$ зависят только от разности $p - \omega\theta$ (не содержат $\overline{z}$) и, следовательно, не образуют полного базиса. Данное обстоятельство связано с тем, что неэрмитов оператор (6) приводится к жордановой нормальной форме, и помимо собственных имеет ряд присоединенных функций, отвечающих тому же самому собственному числу ε_n. Легко убедиться, что собственная функция ψ_n имеет $n-1$ присоединенных функций, которых мы выберем в виде

$$\psi_{n,k} = \frac{(-1)^k}{2^k k! \sqrt{\pi}} H_k(\overline{z}) H_{n-k-1}(z) e^{-z^2}, \tag{18}$$

где индекс k пробегает значения от 1 до $n-1$. Вместе с $\psi_{n,0} = \psi_n$ они образуют базис жордановой клетки размерности n, отвечающей энергии $\epsilon_n = n\omega$:

$$L\psi_{n,k} = \epsilon_n \psi_{n,k} + \omega\psi_{n,k-1} \tag{19}$$

(чтобы оборвать цепочку на собственной функции $\psi_{n,0}$, положим $\psi_{n,-1} = 0$).

Построенная система функций является полной. Произвольная функция может быть разложена по базису $\psi_{n,k}$, используя соотношения ортогональности

$$\langle \psi_{n,k} | \psi_{n',k'} \rangle_z = (-1)^{n-1} \delta_{n,n'} \delta_{k+k'+1,n}, \tag{20}$$

где скалярное произведение $\langle \cdot | \cdot \rangle_z$ определено как

$$\langle \psi | \psi' \rangle_z = \int dz\, d\overline{z}\, \psi(\overline{z}, z) \psi'(z, \overline{z}), \tag{21}$$

так что перестановка аргументов в одной из функций согласована со сменой знака p в уравнении (12). Отметим, что меры интегрирования в уравнениях (12) и (21) связаны посредством $dz\, d\overline{z} = 2\omega\kappa^2 d\theta\, dp$.

При эволюции волновой функции $\psi_{n,k}$ под действием оператора L к ней подмешиваются другие состояния жордановой клетки, отвечающие той же энергии, что приводит к появлению степеней t на фоне экспоненциального затухания:

$$e^{-Lt} \psi_{n,k} = e^{-n\omega t} \sum_{m=0}^{k} \frac{(-\omega t)^m}{m!} \psi_{n,k-m}. \tag{22}$$

Перейдем теперь к изучению спектральных свойств гамильтониана $\mathcal{H}$ в уравнении (5). В рассматриваемом случае слабого шума уравнение (7) дает $V_2 = -\omega^2$, что разбивает пространство состояний $\mathcal{H}$ на четный и нечетный сектора с волновыми функциями $\hat{\Psi}_{e,o} = (\Psi, \pm\omega\Psi)^T$, которые эволюционируют независимо с гамильтонианами $\mathcal{H}_{e,o} = L \mp \omega$. Таким образом, построенная выше система собственных и присоединенных функций оператора L позволяет полностью описать эволюцию дублета $\hat{\Psi}$ под действием гамильтониана $\mathcal{H}$.

Найдем, как в пределе $\alpha/\omega^3 \ll 1$ происходит эволюция волновой функции (10) при удалении от границы. Раскладывая ее на четную и нечетную компоненту, получаем

$$e^{-\mathcal{H}t} \hat{\Psi}^{(\mathrm{b})}_{\theta_0} = \begin{pmatrix} \omega^{-1} \cosh \omega t \\ \sinh \omega t \end{pmatrix} e^{-Lt} \delta(\theta - \theta_0). \tag{23}$$

Для вычисления эволюции дельта функции, разложим ее по базису $\psi_{n,k}$:

$$\delta(\theta - \theta_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n-1} c_{n,k} \psi_{n,k}. \tag{24}$$

Коэффициенты $c_{n,k}$ находятся с помощью соотношений ортогональности (20) и свойства полиномов Эрмита

$$H_n(x + y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2y)^{n-k} H_k(x), \tag{25}$$

следующего из разложения в ряд Тейлора, и даются формулой

$$c_{n,k} = (-1)^{n-1} 2\kappa\omega \frac{(2\kappa\omega\theta_0)^{n-2k-1}}{(n-2k-1)!}. \qquad (26)$$

Эволюции дельта функции в уравнении (23) находится из разложения (24) и соотношений (22). Память о границе забывается за характерное время ω^{-1} (обратная ляпуновская экспонента). За это время теряется различие между двумя компонентами волновой функции $\hat{\Psi}$, и обе они выходят на значение, определяемое состоянием $\psi_{1,0}$, отвечающим минимальной энергии $\epsilon_1 = \omega$:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-Ht}\hat{\Psi}^{(\mathrm{b})}_{\theta_0} = \hat{\Psi}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \end{pmatrix} \kappa\psi_{1,0}, \qquad (27)$$

что и есть нулевая мода уравнения (5) в пределе $\alpha/\omega^3 \ll 1$.

4. Покажем, как построенная спектральная теория операторов $\mathcal{H}$ и L позволяет систематически вычислять различные корреляционные функции НПТ *в случае слабого шума.* Результаты данного раздела могут быть получены и напрямую, используя явное выражение для НТП через $f(t)$ с последующим усреднением по гауссовому белому шуму (2) [10], однако их вывод с помощью трансфер-матричного формализма представляется методически важным, так как иллюстрирует общую схему и позволяет убедиться в ее работоспособности.

Начнем рассмотрение с вычисления парного коррелятора углов для ННПТ на всей действительной оси. Подставляя в общую формулу (11) нулевую моду в виде (27) и учитывая, что в результате остается только четный сектор теории, искомый коррелятор можно выразить через скалярное произведение (21) в z-представлении следующим образом:

$$\langle\theta(0)\theta(t)\rangle = \langle\psi_{1,0}|\theta e^{-(L-\omega)t}\theta|\psi_{1,0}\rangle_z. \qquad (28)$$

С помощью уравнений (16) и (18) можно выразить $\theta\psi_{1,0}$ через функции $\psi_{2,0}$ и $\psi_{2,1}$. Используя закон эволюции (22), находим

$$e^{-(L-\omega)t}\theta\psi_{1,0} = e^{-\omega t}\frac{\psi_{2,1} - (1/2+\omega t)\psi_{2,0}}{2\kappa\omega}. \qquad (29)$$

Считая матричный элемент (28) как перекрытие между состояниями $e^{-(L-\omega)t}\theta\psi_{1,0}$ и $\theta\psi_{1,0}$ с помощью соотношений (20), находим искомый парный коррелятор:

$$\langle\theta(0)\theta(t)\rangle = \langle\theta^2\rangle(1+\omega t)e^{-\omega t}, \qquad (30)$$

где, как получено в работе [10],

$$\langle\theta^2\rangle = \alpha/2\omega^3. \qquad (31)$$

Появление на фоне $e^{-\omega t}$ линейно растущего со временем вклада связано с возбуждением состояний $\psi_{2,0}$ и $\psi_{2,1}$, отвечающих жорданову блоку размерности 2.

Аналогичным образом можно вычислить и более сложные корреляторы ННПТ. Например,

$$\langle\theta^2(0)\theta^2(t)\rangle = \langle\theta^2\rangle^2\left[1 + 2(1+\omega t)^2 e^{-2\omega t}\right]. \qquad (32)$$

Формально, здесь оператор θ^2, примененный к $\psi_{1,0}$, возбуждает жорданов триплет $\psi_{3,0}$, $\psi_{3,1}$, $\psi_{3,2}$, что приводит к появлению членов вплоть до t^2 на фоне экспоненциального убывания. Структура же коррелятора (32) связана с гауссовой статистикой θ на ННПТ [10], позволяющей выразить его через парный коррелятор (30) с помощью теоремы Вика. Обобщение развитого формализма на многоточечные корреляторы также не представляет труда.

В качестве следующего примера рассмотрим вычисление среднего значения угла $\langle\theta(t)\rangle_{\theta_0}$ для НПТ на полубесконечном временном интервале $t > 0$ с граничным условием $\theta(0) = \theta_0$. Согласно уравнению (11), средний угол дается матричным элементом $\langle\theta(t)\rangle_{\theta_0} = \langle\hat{\Psi}_0|\theta e^{-\mathcal{H}t}|\hat{\Psi}^{(\mathrm{b})}_{\theta_0}\rangle$. Проще всего его вычислить, свернув найденное выше выражение (29) с волновой функцией на границе (10). Интегрируя по импульсу, видим, что вклад от $\psi_{2,0} = 2ze^{-z^2}/\sqrt{\pi}$ исчезает в силу нечетности по z, и получаем простое экспоненциальное убывание

$$\langle\theta(t)\rangle_{\theta_0} = \theta_0 e^{-\omega t}. \qquad (33)$$

Этот же ответ можно получить и другим способом, посчитав матричный элемент θ между нулевой модой $\psi_{1,0}$ и проэволюционированной граничной волновой функцией (23). Такие матричные элементы отличны от нуля только с жордановым дублетом $\psi_{2,0}$ и $\psi_{2,1}$. Однако, согласно (26), $\psi_{2,1}$ не входит в разложение дельта функции, а $\psi_{2,0}$ является собственной и не генерирует при эволюции линейного члена. В результате, мы снова приходим к выражению (33).

Сравнение выражений (30) и (33) показывает, что, несмотря на наличие дополнительного множителя ωt в уравнении (30), ляпуновская экспонента может быть стандартным образом определена из асимптотического поведения как одного, так и другого коррелятора на больших временах:

$$\lambda = -\lim_{t\to\infty}\frac{\partial\ln\langle\theta(0)\theta(t)\rangle}{\partial t} = -\lim_{t\to\infty}\frac{\partial\ln\langle\theta(t)\rangle_{\theta_0}}{\partial t}. \qquad (34)$$

5. Остановимся теперь на вопросе о вычислении ляпуновской экспоненты для НПТ *при произвольных значениях параметра* α/ω^3. Ляпуновская экспонента, определяющая затухание корреляций на больших

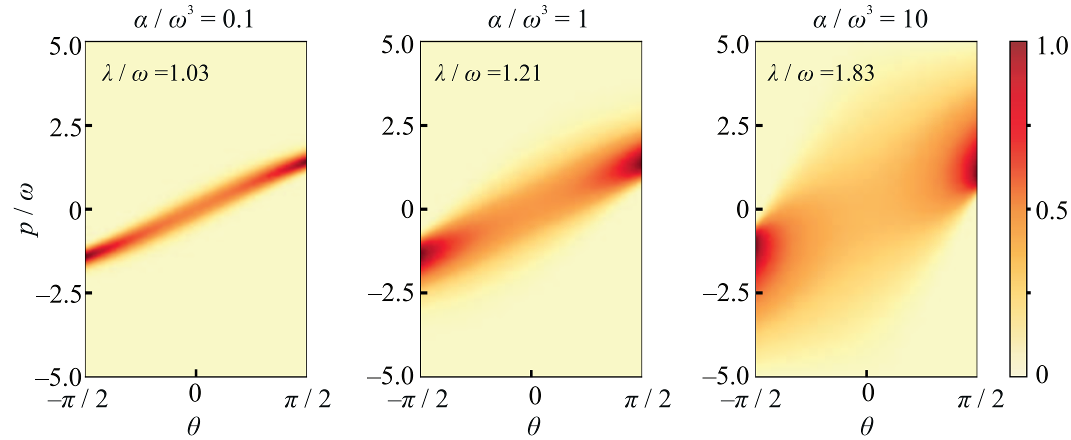

Рис. 3. (Цветной онлайн) Первое возбужденное состояние $\psi_1(\theta, p)$ оператора (6) при трех значениях параметра $\alpha/\omega^3 = 0.1,\ 1,\ 10$. Волновая функция нормирована на максимальное значение

временах, определяется энергией первого возбужденного состояния. Как мы показали выше, в случае слабой накачки $\lambda = \omega$. При увеличении параметра α/ω^3 ангармонизм маятника приводит к отклонению λ от ω.

При малом значении параметра $\alpha/\omega^3 \ll 1$ нелинейные члены в уравнении (6) могут быть учтены по теории возмущений, что позволяет получить как поправку к собственной функции ψ_n, которая становится зависящей и от "антиголоморфной" координаты $\overline{z}$, так и поправку к собственному значению ϵ_n. Особенно просто данная процедура выглядит для первого возбужденного состояния, которое не вырождено и не имеет присоединенных собственный функций. Для этого представим собственную функцию и соответствующую энергию как ряды по степеням малого параметра $x = \alpha/\omega^3$:

$$\psi_1 = [1 + h_1(z, \overline{z})x + h_2(z, \overline{z})x^2 + \dots]e^{-z^2},$$
$$\epsilon_1 = \omega(1 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \dots),$$

где $h_m(z, \overline{z})$ – полином степени не выше $4m$. Подставляя эти выражения в уравнение $L\psi_1 = \epsilon_1\psi_1$ и последовательно разрешая в каждом порядке по x, можно вычислить несколько первых полиномов $h_m(z, \overline{z})$ и коэффициентов γ_m. Результат для ϵ_1, определяющий ляпуновскую экспоненту, приведен в уравнении (4).

Отметим, что аналогичный подход позволяет найти поправки и к нулевой моде (15) суперпотенциала ψ_0 по степеням α/ω^3. Как и следовало ожидать, ее энергия остается нулевой в силу суперсимметрии теории. Найденные поправки позволяют получить аналитическое разложение для одноточечной статистики ННПТ, численно изученной в работе [10]. В частности, они позволяют уточнить формулу (31) для $\langle\theta^2\rangle$:

$$\langle\theta^2\rangle = \frac{x}{2} - \frac{13}{16}x^2 + \frac{26989}{12288}x^3 + \dots, \qquad (35)$$

а также описать негауссовость функции распределения $P(\theta)$, характеризующейся четвертым кумулянтом $\langle\langle\theta^4\rangle\rangle = \langle\theta^4\rangle - 3\langle\theta^2\rangle^2$:

$$\langle\langle\theta^4\rangle\rangle = -\frac{241}{256}x^3 + \frac{64725}{8192}x^4 + \dots \qquad (36)$$

Отметим, что отличие от нормального распределения, измеряемое куртозисом $\langle\langle\theta^4\rangle\rangle/\langle\theta^2\rangle^2$, возникает лишь в первом порядке по $x = \alpha/\omega^3$. Отрицательное значение $\langle\langle\theta^4\rangle\rangle$ отвечает подавлению хвостов $P(\theta)$ за счет конечности интервала $(-\pi/2, \pi/2)$.

В случае произвольной силы шума возбужденные состояния оператора (6) могут быть построены только численно. Для определения ляпуновской экспоненты $\lambda = \epsilon_1$ необходимо найти первое возбужденное состояние, решив уравнение $L\psi = \epsilon_1\psi$ с граничными условиями

$$\psi(\pi/2, p < 0) = \psi(\theta, -\infty) = 0, \qquad (37a)$$
$$\psi(-\pi/2, p > 0) = \psi(\theta, \infty) = 0. \qquad (37b)$$

Данные граничные условия схожи с граничными условиями для нулевой моды суперпотенциала, выведенными в работе [10]. Единственное отличие заключается в том, что в той части границы, где волновая функция задана, ее значение равно нулю, а не $\pm 1/2$.

Результаты численного определения первого возбужденного состояния для различных значений параметра α/ω^3 представлены на рис. 3. При малом α/ω^3 функция $\psi_1(\theta, p)$ близка к гауссиане $\psi_{1,0}(z)$, слегка увеличиваясь вблизи $\theta = \pm\pi/2$. По мере увеличения α/ω^3 максимумы $\psi_1(\theta, p)$ вблизи краев интервала становятся более выраженными, так что при $\alpha/\omega^3 \to \infty$ первая мода имеет два горба, локализованных вблизи краев. Энергия первой моды, определяющая ляпуновскую экспоненту, как функция параметра α/ω^3 построена на рис. 2. При малых α/ω^3 численный счет согласуется с выражением (4), полученным с помощью теории возмущений, вплоть до значений $\alpha/\omega^3 \approx 0.25$. При бо́льших α/ω^3 ляпуновская экспонента в единицах ω раскладывается по степеням $(\alpha/\omega^3)^{-1/3}$ с ведущим членом $\lambda \approx 0.66\,\alpha^{1/3}$.

В заключение отметим, что развитая нами теория является обобщением суперсимметричного подхода, предложенного в работе [10], на случай непадающих траекторий, рассматриваемых на конечных временных интервалах, и многоточечных корреляционных функций. Построенная классификация возбужденных состояний трансфер-матричного гамильтониана завершает построение теории статистических свойств непадающих траекторий в задаче Уитни со случайной короткопериодной накачкой. Предложенный формализм позволяет находить произвольные корреляционные функции на непадающей траектории путем решения уравнений в частных производных типа Фоккера–Планка со специфическими граничными условиями.

Авторы благодарны А. В. Хвалюку, И. В. Побойко за помощь с численном счетом.

Данная работа поддержана грантом Российского научного фонда # 20-12-00361.

1. R. Courant and H. Robbins, *What is Mathematics?: an elementary approach to ideas and methods*, Oxford University Press, N.Y. (1996).
2. A. Broman, Nordisk Matematisk Tidskrift **6**, 78 (1958).
3. T. Poston, Manifold **18**, 6 (1976).
4. V. Arnold, *What is mathematics?*, MCCME, Moscow (2002) (in Russian).
5. И. Ю. Полехин, Нелинейная динам. **10**, 465 (2014); arXiv:1407.4787.
6. O. Zubelevich, Appl. Math. (Warsaw) **42**, 159 (2015).
7. S. V. Bolotin and V. V. Kozlov, Izv. Math. **79**, 894 (2015).
8. R. Srzednicki, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S **12**, 2127 (2019).
9. A. Shen, arXiv:1907.01598 (in Russian).
10. N. A. Stepanov and M. A. Skvortsov, arXiv:2006.13819.
11. G. Parisi and N. Sourlas, Phys. Rev. Lett. **43**, 744 (1979).
12. G. Parisi and N. Sourlas, Nucl. Phys. B **206**, 321 (1982).
13. J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Clarendon Press, Oxford (2015), ch. 16.
14. K. B. Efetov and A. I. Larkin, ZhETF **85**, 764 (1983) [Sov. Phys. JETP **58**, 444 (1983)].
15. H. Risken, *The Fokker-Planck Equation: Methods of Solution and Applications*, Springer, Berlin (1996).
16. G. E. Shilov, *Linear Algebra*, Dover, N.Y. (1977).