Российская Академия Наук
Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау

На правах рукописи

СКВОРЦОВ Михаил Андреевич

СТАТИСТИКА УРОВНЕЙ И ЛОКАЛИЗАЦИЯ В ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМАХ С КИРАЛЬНЫМ ЭЛЕКТРОННЫМ СПЕКТРОМ

01.04.02 – теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук
Фейгельман М. В.

Черноголовка - 1998

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

За последние 15 лет достигнут значительный прогресс в исследовании свойств неупорядоченных металлов, связанных с существенно квантовыми аспектами их поведения. Если при достаточно высоких температурах и слабом беспорядке применима стандартная квазиклассическая теория металлов, основанная на использовании уравнения Больцмана для описания движения электронов, то при сильном беспорядке, либо при низких температурах, необходимо начинать с решения уравнения Шредингера для конкретной реализации примесей. Выражения для физических величин получаются в результате усреднения по реализациям случайного потенциала. При этом квантовые свойства системы проявляются в интерференции электронных волн, прошедших по различным возможным путям.

Исторически первым и наиболее изученным интерференционным эффектом в низкотемпературной физике твердого тела является слабая локализация [1], обусловленная увеличением вероятности возврата за счет квантовой интерференции прямого и обращенного по времени пути. Теоретическое описание явления слабой локализации основано на выделении в диаграммном разложении мягких диффузионных мод, описывающих многократную интерференцию электронных волн при рассеянии на примесях. Ненулевое магнитное поле, нарушающее симметрию по отношению к обращению времени, приводит к подавлению эффекта и, как следствие, к отрицательному магнитосопротивлению.

Характерным масштабом длины, на котором становятся существенными квантовые корреляции, является длина сбоя фазы L_φ диффундирующей частицы. Можно сказать, что макроскопический образец состоит из мезоскопических областей размера порядка L_φ, интерференция внутри которых определяет свойства макрообъекта. С другой стороны, развитие экспериментальных методов позволило настолько уменьшить размер L исследуемых систем, что стало возможным выполнение неравенства $L < L_\varphi$. Такие мезоскопические системы, обычно реализуемые в виде маленьких металлических гранул, получили название «квантовых точек». При рассмотрении таких систем возникает ряд новых эффектов, обусловленных квантовой природой электрона. Примерами эффектов такого рода являются, в частности, мезоскопические флуктуации проводимости и плотности состояний, наблюдаемые в системах, состоящих из 10^8–10^{10} электронов. При рассмотрении «квантовых точек» стало необходимо учитывать эффекты, связанные с конечностью объема системы или, иными словами, с «тонкой структурой» спектра электронных возбуждений. Характерным энергетическим масштабом здесь является среднее расстояние $\delta = (\nu L^d)^{-1}$ между одноэлектронными уровнями (ν — плотность состояний на уровне Ферми). При рассмотрении интервалов энергий, сравнимых с δ, необходимо учитывать корреляции между близкими уровнями энергии. Аналогичные задачи впервые возникли в ядерной физике при описании спектра возбуждений сложных ядер, где для их решения было предложено использовать феноменологическую модель случайных матриц определенной симметрии [2,3]. В зависимости от наличия или отсутствия симметрии по отношению к обращению времени и перевороту спина выделяют три Вигнер-Дайсоновских ансамбля случайных матриц: ортогональный, унитарный и симплектический. Впервые теория случайных матриц к изучению неупорядоченных металлов была применена в работе [4] в 1965 г, где рассматривалось поглощение электромагнитного поля ансамблем малых металлических гранул.

Для описания статистики уровней на масштабах порядка δ методы стандартной теории возмущений являются непригодными. Одним из наиболее мощных непертурбативных подходов, разработанных в применении к задачам с беспорядком, является метод нелинейной суперматричной σ-модели Ефетова [5]. Он нашел широкое применение в рассматриваемой области и в ряде случаев является единственным способом получения непертурбативного результата. Основной идеей метода является представление функции Грина в виде функционального интеграла по обычным коммутирующим и грассмановым полям, что позволяет легко провести усреднение по реализациям случайного потенциала. В нульмерном пределе, когда рассматриваются только не зависящие от пространства суперматрицы $Q(\mathbf{r})$, σ-модель воспроизводит результаты теории случайных матриц. Нульмерный предел справедлив при энергиях меньших энергии Таулесса $E_{Th} = D/L^2$, где D — коэффициент диффузии, т. е. на больши́х временах, когда частица успевает покрыть все фазовое пространство. На энергиях, бо́льших энергии Таулесса, возникают неуниверсальные поправки к результатам теории случайных матриц, связанные с возбуждением высших мод в σ-модели.

При изменении параметров мезоскопической системы, например, с помощью внешнего магнитного поля, возникает задача о так называемой параметрической статистике уровней [6]. Будучи сформулированной как задача о броуновском блуждании в пространстве гамильтонианов, она оказывается эквивалентной задаче о вычислении динамических корреляционных функций в одномерном ферми-газе с сильным взаимодействием. Параметрические корреляции уровней определяют, в частности, скорость поглощения энергии мезоскопической системой при изменении ее параметров.

Особый интерес связан с поведением двумерных систем, т. к. размерность $d = 2$ является маргинальной для уравнения диффузии: при $d \leq 2$ диффундирующая частица обязана вернуться в начальную точку, а при $d > 2$ появляется ненулевая вероятность ухода на бесконечность без возврата. Это приводит к тому, что, согласно скейлинговой теории локализации [7], в размерности $d \leq 2$ все электронные состояния являются локализованными при любом, сколь угодно слабом беспорядке (в отсутствие магнитного поля).

Несмотря на то, что многие из упомянутых результатов получены сравнительно недавно, они уже стали классическими для физики твердого тела. В то же время, развитие технологии приводит к появлению новых, еще не исследованных систем, где явления квантовой интерференции определяют низкотемпературное поведение.

В первую очередь здесь следует упомянуть гибридные системы, состоящие как из областей нормального металла, так и сверхпроводника [8]. Такие системы весьма активно исследуются экспериментально в последние несколько лет, поэтому разработка адекватных теоретических методов является, без сомнения, весьма актуальной. Как известно, беспорядок не оказывает существенного влияния на свойства сверхпроводников с s-спариванием, что связано с наличием щели в спектре возбуждений, в результате чего одночастичные состояния практически не заполнены при $T \ll \Delta$. Мезоскопические эффекты в системах со сверхпроводимостью возникают тогда, когда щель в спектре возбуждений становится малой или исчезает вовсе. Такая ситуация возникает либо в случае куперовского спаривания не в s-канале, когда имеются нули в спектре возбуждений, либо для смешанных систем, содержащих сверхпроводник в контакте с нормальным металлом. Теория мезоскопических флуктуаций для высших типов спаривания еще не разработана. В то же время, имеется большой интерес к смешанным системам с s-сверхпроводимостью. Здесь в зависимости от величины щели, наведенной в нормальном металле за счет эффекта близости, нужно различать две разные ситуации. В первом случае наведенная щель, имеющая порядок энергии Таулесса, оказывается малой по сравнению с объемной

Δ, но остается конечной. Мезоскопические флуктуации в таком типе систем исследовались в работе [9]. Во втором случае щель в спектре возбуждений в точности обращается в нуль, что происходит, когда фаза параметра порядка меняется в пространстве. Теперь плотность состояний является конечной при произвольно низких энергиях, и квантовая интерференция за счет андреевского рассеяния существенно меняет среднюю плотность состояний $\langle\rho(\epsilon)\rangle$ при $\epsilon \sim \delta$. Общий подход к описанию такого типа систем, характеризующихся нулевым *средним по пространству* сверхпроводящим параметром порядка, был предложен Алтландом и Цирнбауером [10], которые использовали модифицированную теорию случайных матриц. Ими было показано, что зеркальная симметрия уравнений Боголюбова – Де Жена приводит к дополнительным связям, которые необходимо наложить на матричный гамильтониан системы. Конкретная форма связей зависит от наличия или отсутствия симметрии по отношению к обращению времени и к повороту спина. Таким образом, Алтланд и Цирнбауер определили четыре дополнительных класса ансамблей случайных матриц (по отношению к стандартным Вигнер-Дайсоновским ансамблям), описывающих мезоскопические флуктуации в рассматриваемом типе S-N-S систем.

Одним из наиболее фундаментальных примеров таких систем является абрикосовский вихрь в сверхпроводнике II рода. Как известно [11], в ядре вихря существуют локализованные электронные состояния, которые в чистом случае характеризуются угловым моментом квазичастицы. Вращение фазы сверхпроводящего параметра порядка в вихре нарушает симметрию между направлениями по и против часовой стрелки, так что локализованные состояния имеют определенную (соответствующую направлению магнитного поля) киральность. Вследствие того, что средний параметр порядка в вихре равен нулю, состояния киральной ветви не имеют щели, и в присутствии беспорядка существует ненулевая вероятность найти уровень на произвольно близком расстояния от уровня Ферми.

Наряду с гибридными системами сверхпроводник – нормальный металл, другой принципиально важной системой, в которой эффекты квантовой интерференции приводят к неожиданному поведению, является двумерный электронный газ в кремниевых полевых транзисторах высокой подвижности, где недавно был экспериментально обнаружен фазовый переход металл – диэлектрик в нулевом магнитном поле [12]. Особая актуальность этой задачи обусловлена тем, что существование металлической фазы в размерности $d = 2$ в корне противоречит устоявшимся представлениям скейлинговой теории локализации [7]. Несмотря на большое количество теоретических работ [13] – [16], механизм происхождения проводящей фазы до сих пор не выяснен. Понятно, что кулоновское взаимодействие должно играть важную роль благодаря низкой концентрации электронов, достигающей 10^{11}см$^{-2}$ в точке перехода. С другой стороны, важной технологической особенностью полевых транзисторов на основе кремния является резко асимметричный электрический потенциал в направлении, нормальном плоскости двумерного электронного газа. Асимметрия удерживающего потенциала приводит к сильному спин-орбитальному взаимодействию в такой системе, в результате чего электронный спектр оказывается расщепленным на две ветви с определенными киральностями.

Таким образом, мы обсудили две актуальные проблемы в теории неупорядоченных систем: вопрос о статистике электронных состояний, локализованных в ядре сверхпроводящего вихря и вопрос о фазовом переходе в металлическую фазу в двумерном газе киральных фермионов. Обе задачи объединяет не только мезоскопическая физика, но и киральная природа спектра, учет которой требует разработки новых методов. Диссертационная работа преследует следующие цели: построить микроскопическую теорию статистики электронных уровней в ядре сверхпроводящего вихра; использовать полученные результаты для описания процесса диссипации энергии при движении вихрей в слабо неупорядоченных сверхпроводниках и вычислить эффективную проводимость сверхпроводников в смешанном состоянии при низких температурах в мезоскопическом пределе; обобщить теорию локализационных поправок к проводимости грязного металла на случай двумерного металла с киральным спектром.

Перейдем к изложению содержания диссертации. Первая глава посвящена вычислению продольной проводимости в режиме течения потока в смешанном состоянии двумерных сверхпроводников в мезоскопическом пределе, когда диссипация энергии определяется редкими переходами между дискретными состояниями, локализованными в ядре вихря. Существовавшая в течение более 30 лет квазиклассическая теория проводимости в режиме течения потока основывалась на предположении, что взаимодействие электронов киральной ветви движущегося вихря с потенциалом примесей может быть рассмотрено как задача о рассеянии в непрерывном спектре. Показано, что в случае двумерных или сильно анизотропных (слоистых) сверхпроводников вышеупомянутое квазиклассическое описание перестает быть справедливым при достаточно низких температурах и при малых скоростях движения вихревой решетки, когда необходим учет дискретности уровней. Изменение случайного потенциала при движении вихря приводит к эффективной динамике уровней и возникновению параметрических корреляций, где в качестве параметра выступает координата центра вихря. В мезоскопическом пределе диссипация энергии движущимся вихрем происходит за счет редких зенеровских переходов между электронными состояниями в ядре вихря с последующей отдачей энергии в тепловой резервуар путем излучения фонона. Для описания статистики состояний киральной ветви в умеренно чистом сверхпроводнике использована теория случайных матриц класса C по классификации Алтланда и Цирнбауера. Используя выражение для скорости диссипации энергии в рамках применимости формулы Кубо и известный квазиклассический результат, найдено значение коррелятора «скоростей» уровней, что позволяет установить количественную границу между квазиклассическим и мезоскопическими пределами. Последний реализуется при малых скоростях $v \ll v_K = v_0/\sqrt{k_F l}$, где $v_0 = p_F/\Delta$ — скорость распаривания.

С целью нахождения стационарной заселенности уровней киральной ветви использован метод кинетического уравнения, которое учитывает межуровневые переходы за счет зенеровских процессов и фононную релаксацию киральных состояний. В случае унитарного ансамбля, к которому сводится класс C при больших энергиях, полная скорость диссипации не зависит от конкретного вида электрон-фононного взаимодействия и совпадает с квазиклассическим значением, справедливым в пределе больших скоростей $v \gg v_K$. Специфика класса C проявляется в подавлении вероятности зенеровского туннелирования между состояниями вблизи уровня Ферми. Вычислена вероятность перехода в единицу времени между состояниями с наинизшей положительной и наивысшей отрицательной энергиями. В случае, когда вероятности зенеровских переходов зависят от энергии, на которой произошло столкновение уровней, для определения скорости диссипации необходимо решение кинетического уравнения с учетом реального вида столкновительного члена. Показано, что для электронных состояний в ядре вихря доминирующим является электрон-фононное взаимодействие на примесях, найдена скорость релаксации для случая взаимодействия с трехмерными фононами.

Оценена характерная ширина i_{char} стационарного неравновесного распределения, возникающего при движении вихря. Отличие скорости диссипации для класса C от ответа для унитарного ансамбля определяется уровнями, близкими к энергии Ферми, и пропорционально дискретной производной функции распределения на уровне Ферми: $f_0 - f_{-1} \sim 1/i_{\rm char}$. Получено выражение для продольной проводимости в режиме течения потока в мезоскопическом пределе, которое оказывается несколько меньше квазиклассического значения и медленно растет с увеличением приложенного электрического поля. В последнем разделе обсуждаются условия применимости рассматриваемой теории.

Во второй главе исследован вопрос о статистике электронных состояний киральной ветви, локализованной в ядре вихря, и приведен микроскопический вывод нелинейной суперсимметричной σ-модели для усредненной по беспорядку одночастичной функции Грина. Задача решается для двумерной геометрии в умеренно чистом пределе. Обсуждаются два различных подхода к решению задачи: построение суперсимметричной теории поля в координатном пространстве и сведение задачи к эквивалентной одномерной теории случайных матриц, что справедливо при изучении статистики низколежащих состояний киральной ветви.

В разделах 3 – 5 строится теоретико-полевое описание для усредненной по реализациям случайного потенциала одночастичной запаздывающей функции Грина $G^R(\epsilon)$ в координатном пространстве. Для беспорядка принимается гауссов δ-функционный коррелятор, что соответствует большому числу примесей в ядре вихря. Такая ситуация возникает в умеренно чистом пределе в случае, когда примеси имеют малое по сравнению с атомным сечение рассеяния. Выведено эффективное действие для коллективного суперматричного поля и найдено седловое решение полученной теории поля, которое оказывается вырожденным при $\epsilon = 0$. Проведен анализ существующих методов параметризации седлового многообразия. Предложен явный алгоритм, позволяющий получить параметризацию в общем случае, не прибегая к процедуре компактификации. Найдена параметризация седлового многообразия. В рамках применимости нульмерной σ-модели получен ответ для средней плотности состояний $\langle\rho(\epsilon)\rangle$, функциональная форма которого совпадает с результатом теории случайных матриц для класса C.

В разделе 6 задача о статистике низколежащих состояний киральной ветви сводится к эквивалентной теории случайных матриц. Вычислен коррелятор матричных элементов случайного потенциала. В разделе 7 изучена диаграммная техника для задачи в матричной формулировке. Решены уравнения самосогласованного борновского приближения. Проведена классификация диаграмм высших порядков с пересечениями пунктиров. Показано, что все высшие диаграммы, не учтенные в самосогласованном борновском приближении, малы по параметру $1/\ln(\Delta\tau)$. Исследована лестничная последовательность для куперона. Вычислена однокуперонная поправка к собственно-энергетической части, которая приводит к подавлению средней плотности состояний в полосе энергий $\epsilon \ll \tau^{-1}\ln(1/\omega_0\tau)$.

С целью получения непертурбативного результата в разделах 8, 9 выведена нелинейная суперматричная σ-модель. Действие σ-модели определяет характерный масштаб энергий, ниже которого основной вклад в физические величины дает нулевая мода. Соответствующая величина, имеющая смысл энергии Таулесса в неупорядоченном металле, дается двухкуперонной диаграммой и имеет порядок $\omega_{Th} \simeq \sqrt{(\omega_0/\tau)\ln(1/\omega_0\tau)}$. Показано, что ренормировка средней плотности состояний ненулевыми модами σ-модели связана с нарушением симметрии между числом степеней свободы в фермион-фермионном и бозон-бозонном секторах теории. Полная симметрия восстанавливается за счет нечетных мод, однако из-за большой массы они не дают вклада в низкоэнергетическую физику. В разделе 10 обсуждается иерархия масштабов при выводе σ-модели.

В третьей главе вычисляется квантовая поправка к проводимости двумерного электронного газа при наличии спин-орбитального взаимодействия Рашбы, когда $SU(2)$ симметрия по отношению к повороту спина нарушена на уровне регулярного гамильтониана, в то время как потенциальное рассеяние может считаться не зависящим от спина. Характерным энергетическим масштабом, связанным со взаимодействием Рашбы, является расщепление Δ между двумя киральными ветвями на уровне Ферми. Задача об интерференционной поправке к проводимости решается при произвольном значении параметра $x = \Delta\tau$. Выведено уравнение, определяющее спиновую структуру куперонного пропагатора. Синглетный сектор оказывается безмассовым, в то время как все триплетные моды приобретают щель, пропорциональную x. Получено выражение для поправки к проводимости как функция параметра x. При увеличении x найденное выражение описывает переход от локализационной поправки ортогонального класса универсальности к симплектической делокализационной поправке. Первая квантовая поправка меняет знак и становится антилокализующей при $x = (l/L_\varphi)^{1/3} \ll 1$.

Глава I.

АНОМАЛЬНАЯ ДИНАМИКА ВИХРЕЙ В МЕЗОСКОПИЧЕСКОМ ПРЕДЕЛЕ

1. Обсуждение механизмов диссипации

Принято считать, что в режиме течения потока продольная (σ_{xx}) и холловская (σ_{xy}) проводимости в смешанном состоянии сверхпроводников II рода даются, соответственно, выражениями Бардина-Стивена [17] и Нозьера-Винена [18]:

$$\sigma_{xx} \approx \sigma_n \frac{H_{c2}}{B}; \tag{1.1}$$

$$\sigma_{xy} \approx (\omega_0 \tau)\sigma_{xx}, \tag{1.2}$$

где σ_n — проводимость в нормальном состоянии, τ — упругое время жизни, определяемое рассеянием на примесях, $\hbar\omega_0 \approx \Delta^2/E_F \ll \Delta$ (уравнения (1.1), (1.2) соответствуют умеренно чистому пределу $\omega_0\tau \ll 1$). Выражение (1.1) для продольной проводимости имеет простую интерпретацию: оно отражает тот факт, что область ядра вихря (площадью $\sim \xi^2$), где сверхпроводящий параметр порядка существенно подавлен по сравнению со значением в объеме, при рассмотрении ее электронных свойств эквивалентна нормальному металлу. Эта идея находит свое обоснование в существовании внутри ядра локализованных электронных уровней [11] с характерным расстоянием $\hbar\omega_0 \sim \hbar^2/m\xi^2$ между ними. Микроскопическая теория проводимости в режиме течения потока, основанная на рассмотрении такой структуры уровней, была разработана достаточно давно [19,20] (см. также [21,22]). Она основана на квазиклассической неравновесной диаграммной технике [23], и ее предсказания для ρ_{xx} и ρ_{xy} в основном согласуются с вышеупомянутой простой физической картиной до тех пор, пока сверхпроводник не находится в так называемом сверхчистом пределе (когда обратное время рассеяния на примесях τ^{-1} становится больше расстояния между уровнями ω_0). Основной идеей этой теории является то, что взаимодействие между электронами, локализованными вблизи (движущегося) вихря, и примесями может рассматриваться как вариант задачи о рассеянии в непрерывном спектре, то есть аналогично рассеянию на примесях в нормальном состоянии.

Для применимости квазиклассического описания необходимо, чтобы полная *неупругая* ширина Γ электронных состояний в ядре вихря была сравнима или больше расстояния между уровнями. В этом случае размытие уровней является сильным и можно пренебречь дискретной структурой уровней. Полная неупругая ширина состояний в ядре движущегося вихря может быть представлена в виде суммы двух слагаемых: $\Gamma = \Gamma_{\mathrm{int}} + \Gamma_v$, где Γ_{int} — неупругая ширина уровней в покоящемся вихре, которая обусловлена электрон-электронными и (преимущественно) электрон-фононными столкновениями и растет с температурой, тогда как Γ_v обусловлена переходами между уровнями вследствие нестационарности потенциала примесей вокруг движущегося вихря и растет со скоростью движения v. Таким образом, квазиклассический подход оказывается справедливым при достаточно высокой температуре T или скорости вихря v. В обратном пределе уровни, локализованные в ядре вихре, являются существенно дискретными. В противоположность квазиклассическому пределу, мы будем называть этот случай *мезоскопическим.* В мезоскопическом пределе диссипация энергии при движении вихря обусловлена редкими неадиабатическими (зенеровскими) процессами туннелирования электронов между соседними электронными состояниями и последующей релаксацией с излучением фононов.

Переход от квазиклассического к мезоскопическому описанию наступает, когда неупругая ширина сравнивается с характерным расстоянием между уровнями. Последнее оказывается существенно различным в случае трехмерной и квазидвумерной геометрии. В отсутствии беспорядка спектр низколежащих связанных состояний в ядре двумерного вихря [11] характеризуется единственным квантовым числом: угловым моментом квазичастицы μ, который в результате калибровочного преобразования $\Delta \to |\Delta|$ к действительному параметру порядка (ср. (2.7)) становится полуцелым. Эквидистантная киральная ветвь спектра дается выражением $E_\mu = \mu\hbar\omega_0$, справедливым при $\mu \ll N \sim \Delta/\hbar\omega_0$. В трехмерном случае к угловому моменту добавляется еще одно квантовое число — импульс k_z вдоль направления вихря. При этом уровни киральной ветви размываются в зоны с законом дисперсии

$$E_\mu(k_z) - E_\mu(0) \sim \mu\hbar\omega_0 \frac{m_a}{m_c}\frac{k_z^2}{k_F^2}, \tag{1.3}$$

где m_c и m_a — эффективные массы вдоль направления вихря и в плоскости, перпендикулярной вихрю, k_F — ферми-импульс. Таким образом, ширина зоны, связанной с движением вдоль вихря, зависит от величины углового момента и имеет порядок $\mu\hbar\omega_0\frac{m_a}{m_c}$. В случае сильно анизотропных (слоистых) сверхпроводников с большой анизотропией эффективной массы $m_c/m_a \gg 1$ ширина зон, соответствующих низколежащим уровням, оказывается значительно меньше $\hbar\omega_0$, и любой достаточно сильный беспорядок ($\omega_0\tau \ll 1$) приводит к послойной локализации квазичастиц. Соответственно, уровни в слое оказываются чисто дискретными, что формально соответствует двумерному («pancake») вихрю в двумерном сверхпроводнике. Характерное межуровневое расстояние в этом пределе есть просто ω_0. Для изотропных сверхпроводников ($m_c \approx m_a$) сильный межслойный перескок приводит к тому, что состояние является локализованным на нескольких слоях, что уменьшает эффективное расстояние между уровнями, между которыми возможен переход, и, соответственно, область применимости мезоскопического предела. В дальнейшем мы будем рассматривать сильно анизотропный сверхпроводник, когда вихрь может считаться чисто двумерным объектом.

При низкой температуре диссипация энергии, связанная с движением вихря, обусловлена переходами между дискретными электронными состояниями в ядре, точное положение которых определяется конкретной реализацией примесей в области размером $\sim \xi$ около центра вихря. В мезоскопическом пределе квазичастицы большую часть времени адиабатически следуют за мгновенными собственными состояниями зависящего от времени гамильтониана. Зенеровское туннелирование между соседними уровнями происходит, если в процессе движения они сойдутся на расстояние значительно меньшее ω_0. Таким образом, обсуждаемые эффекты имеют *мезоскопическую природу*, в том смысле, что они «чувствуют» структуру корреляций уровней энергии.

Отметим, что наше рассмотрение относится к умеренно чистому пределу $\omega_0 \ll \tau^{-1} \ll \Delta/\hbar$, когда киральные состояния оказываются сильно перемешаны случайным потенциалом примесей, так что средняя (по реализациям) плотность состояний внутри ядра является постоянной (при $E \geq \hbar\omega_0$). Мезоскопические эффекты в динамике вихрей в ультрачистом пределе ($\tau^{-1} \gg \omega_0$) рассмотрены в работах [24,25].

2. Параметрическая статистика уровней киральной ветви

Наиболее мощным способом изучения статистики случайных уровней энергии является использование техники суперсимметричной σ-модели [5]. Микроскопический вывод σ-модели для киральных состояний, локализованных в ядре вихря будет представлен в главе II, а здесь нам достаточно будет воспользоваться технически более простым, хотя и менее общим методом, достаточным для расчета скорости диссипации в умеренно чистом пределе $\omega_0\tau \ll 1$. Для этого заметим, что, во-первых, положение каждого уровня E_i сильно смещено по отношению к невозмущенным уровням [11] идеально чистого сверхпроводника (в дальнейшем мы обозначаем уровни с положительной энергией как E_i с $i = 0, 1, ..$, тогда как отрицательные i будут соответствовать $E_i < 0$; все энергии отсчитываются от уровня Ферми). Во-вторых, волновые функции, соответствующие состояниям киральной ветви, локализованы в одной и той же области размером $\sim \xi^2$ в ядре вихря. Таким образом, естественно описывать распределение уровней с помощью соответствующего ансамбля случайных матриц [3]. Соответствующая теория является нульмерным пределом σ-модели, выведенной в главе II, и, как будет показано, справедлива при не слишком высоких энергиях $E \leq \hbar\sqrt{(\omega_0/\tau)\ln(1/\omega_0\tau)}$.

Вихревое решение нарушает T-инвариантность, однако сохраняет $SU(2)$ инвариантность относительно поворота спина (здесь и ниже мы пренебрегаем зеемановским расщеплением, которое мало в не слишком высоких магнитных полях $B \ll H_{c2}$). Отсюда можно было бы сделать вывод, что нашей задаче соответствует унитарный Вигнер-Дайсоновский ансамбль. Фактически ситуация несколько сложнее, вследствие специфической симметрии уравнений Боголюбова – Де Жена, определяющих уровни в ядре: для каждого уровня с положительной энергией $E_i > 0$ имеется точный зеркальный «антипод» $E_{-i-1} = -E_i$. В результате, ансамбль случайных матриц, соответствующий нашей проблеме, не совпадает в точности ни с одним из трех стандартных Вигнер-Дайсоновских ансамблей. общая классификация ансамблей для описания смешанных систем сверхпроводник-нормальный металл с нулевым средним параметром порядка была недавно разработана Алтландом и Цинбауером [10], которые ввели четыре новых ансамбля, характеризующихся наличием или отсутствием симметрии по отношению к обращению времени и перевороту спина. Рассматриваемой проблеме в точности соответствует класс C по классификации Алтланда и Цинбауера. Статистика уровней для ансамбля случайных матриц класса C может быть описана многочастичной «волновой функцией» вспомогательных одномерных свободных фермионов так же, как это делается для стандартного унитарного ансамбля [26]. Единственным отличием является условие обращения в нуль амплитуды одночастичной «волновой функции» при $E = 0$, т. е. класс C может быть описан с помощью фиктивных свободных одномерных фермионов, «живущих» на *полупрямой* $E > 0$ с зеркальным граничным условием при $E = 0$. В результате, на больших энергиях $E \gg \hbar\omega_0$ статистика уровней для класса C асимпотически совпадает со статистикой для унитарного ансамбля, однако существенно отличается на малых энергиях вблизи уровня Ферми.

При движении вихря меняется реализация беспорядка в области ядра, и уровни, локализованные в ядре, смещаются вверх и вниз, представляя собой новый пример параметрической статистики уровней, ранее исследовавшейся в неупорядоченных металлических зернах и квантовых точках (см., например, [6]). Временная эволюция гамильтониана системы $\hat{H}[X(t)]$ состоит в случайном блуждании в пространстве гамильтонианов, где параметр $X(t)$, управляющий динамикой уровней, в нашем случае является просто координатой вихря.

Как будет показано ниже, характерная ширина стационарной неравновесной функции распределения, возникающей при движении вихря, оказывается большой по сравнению с ω_0, так что в первом приближении можно пренебречь отличием класса C от унитарного ансамбля. Как показано в работе [6], в случае обычных Вигнер-Дайсоновских ансамблей скорость диссипации энергии является универсальной величиной в том смысле, что она определяется среднеквадратичным коррелятором «скоростей» уровней

$$C(0) \equiv \frac{\langle (dE_i/dX)^2 \rangle}{(\hbar\omega_0)^2}, \tag{1.4}$$

где $\hbar\omega_0$ — среднее расстояние между уровнями. В рамках применимости стандартного подхода Кубо скорость диссипации энергии дается выражением [27,28,6]

$$(\partial W/\partial t)_{Kubo} = \frac{\beta}{2}\pi\hbar C(0)(\partial X/\partial t)^2, \tag{1.5}$$

где $\beta = 1, 2, 4$ для систем, описываемых, соответственно, ортогональным, унитарным и симплектическим ансамблями Вигнера-Дайсона.

Формула Кубо справедлива в случае, когда ширина уровней Γ оказывается больше расстояния между ними, т. е. в квазиклассическом пределе. Поэтому мы можем воспользоваться известным квазиклассическим выражением [19,20] для коэффициента трения вихря η, определенного посредством $\partial W/\partial t = \eta\mathbf{v}^2$, для того чтобы извлечь значение коррелятора $C(0)$. Таким образом находим

$$\pi\hbar C(0) = \eta_{\mathrm{Kubo}} = \pi\hbar n_{2D}(\omega_0\tau), \tag{1.6}$$

где второе равенство в уравнении (1.6) следует из результатов [19,20] в пределе $\omega_0 \tau \ll 1$, $n_{2D} = nd$ — двумерная, а n — трехмерная плотность электронов, d — расстояние между сверхпроводящими слоями, а индекс «Kubo» поставлен, чтобы подчеркнуть, что выражение (1.6) имеет тот же смысл и область применимости, что и формула Кубо-Гринвуда. Продольная проводимость в режиме течения потока пропорциональна коэффициенту трения η и дается выражением $\sigma_{xx} = \eta ec/\pi\hbar B$.

Таким образом, мы определили микроскопическую величину $C(0)$ из квазиклассического результата для продольной проводимости. Параметр $C(0)$ имеет размерность обратной площади и определяет характерную длину $\mathcal{L} = 1/\sqrt{C(0)}$, имеющую следующее значение: при перемещении вихря на расстояние $\mathcal{L}$, характерное смещение уровней энергии становится порядка среднего расстояния ω_0 между ними. Согласно уравнению (1.6),

$$\mathcal{L} = (n_{2D}\omega_0\tau)^{-1/2}. \tag{1.7}$$

Отметим, что $\mathcal{L}$ уменьшается (т. е. чувствительность положения уровней к сдвигу вихря возрастает) с уменьшением беспорядка и становится порядка фермиевской длины волны при $\omega_0\tau \sim 1$, то есть на границе применимости уравнения (1.6). С другой стороны, в пределе очень сильного беспорядка $k_F l \sim 1$ длина $\mathcal{L}$ становится порядка «чистой» длины когерентности ξ_0.

Существуют два способа интерпретации соотношения (1.5): а) рассмотреть открытую систему с конечной шириной уровней энергии и воспользоваться стандартным подходом Кубо-Гринвуда [6], и б) работать с строго дискретными уровнями, но при этом учитывать неадиабатические переходы между уровнями $E_i(X)$, меняющимися во времени из-за изменения внешнего параметра X, как это было сделано в работах [27,28]. Ясно, что первый подход неприменим в мезоскопическом пределе, когда неупругая ширина $\Gamma \ll \omega_0$. Следуя второму подходу [28], находим, что квазиклассическим выражением типа формулы Кубо (1.6) можно пользоваться, если характерная частота возмущений уровней $v/\mathcal{L}$ много больше, чем ω_0, т. е. при $v \gg v_K$, где характерная скорость, соответствующая переходу от квазиклассического к мезоскопическому пределу, дается выражением

$$v_K = \frac{v_0}{\sqrt{k_F l}} \tag{1.8}$$

(здесь $v_0 = \Delta/p_F$ — скорость распаривания). При низкой скорости вихря $v \ll v_K$ и низкой температуре вероятность зенеровских переходов между уровнями на расстоянии порядка $\hbar\omega_0$ оказывается экспоненциально подавлена $\propto \exp(-v_K/v)$. В этом случае переход между уровнями происходит, когда в процессе «динамики уровней» расстояние между какой-либо парой оказывается очень малым: $\delta E \leq E_Z = \hbar\omega_0(v/v_K)$, и становится возможным зенеровское туннелирование.

3. Кинетическое уравнение для функции распределения

Для нахождения скорости поглощения энергии воспользуемся кинетическим уравнением для функции распределения $f_i(t)$. В мезоскопическом пределе, когда происходят лишь редкие переходы между соседними уровнями, оно имеет вид

$$\frac{\partial f_i(t)}{\partial t} + R_{i+1}(f_i - f_{i+1}) + R_i(f_i - f_{i-1}) = \mathrm{St}_{\mathrm{ph}}. \tag{1.9}$$

Здесь через R_i обозначена вероятность перехода в единицу времени между $(i-1)$-м и i-м уровнями за счет зенеровского туннелирования, а столкновительный член $\mathrm{St}_{\mathrm{ph}}$ отвечает за фононную релаксацию. Уравнение (1.9) имеет вид дискретного «уравнения диффузии» в энергетическом пространстве.

Для унитарного ансамбля значение R_i не зависит от номера уровня i и, согласно Вилкинсону [27], дается формулой

$$R_\infty = \frac{\pi C(0)}{\omega_0} v^2, \tag{1.10}$$

где индекс «∞» использован, чтобы подчеркнуть, что R_∞ совпадает со скоростью переходов между высокими состояниями ($i \gg 1$) для класса C. Скорость поглощения энергии от внешнего источника определяется зенеровским членом в уравнении (1.9):

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dt} &= \hbar\omega_0 R_\infty \sum_i i \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_Z = \hbar\omega_0 R_\infty \sum_i i \frac{\partial^2 f}{\partial i^2} = -\hbar\omega_0 R_\infty \sum_i \frac{\partial f}{\partial i} \\ &= \hbar\omega_0 R_\infty [f_{-\infty} - f_\infty] = \hbar\omega_0 R_\infty\end{aligned} \tag{1.11}$$

и не зависит от конкретного вида стационарной функции распределения. Используя (1.10), приходим к выводу, что для унитарного ансамбля скорость поглощения энергии в мезоскопическом пределе совпадает с квазиклассическим результатом (1.5). Как было показано в [27,28], это совпадение имеет место *только* для унитарного ансамбля, в то время как ансамбли с другим значением параметра $\beta = 1,4$ приводят к зависящему от скорости коэффициенту трения $\eta \propto v^{\beta/2-1}$.

Для учета отличия класса C от унитарного ансамбля необходимо учесть специфику класса C, которая проявляется в зависимости скорости зенеровского туннелирования R_i от номера уровня i, в результате чего скорость диссипации становится зависящей от вида стационарной функции распределения и, следовательно, от деталей электрон-фононного взаимодействия. В разделе 4 вычисляется скорость переходов для туннелирования из состояния E_{-1} под ферми-поверхностью в первое состояние E_0 над ферми-поверхностью, а раздел 5 посвящен рассмотрению электрон-фононного взаимодействия состояний, локализованных в ядре вихря.

4. Вычисление скоростей переходов для класса C

Для вычисления скорости переходов R_i примéним метод [27], модифицированный на случай класса C. Скорость перехода из состояния $i-1$ в состояние i за счет зенеровского туннелирования может быть представлена в виде

$$R_i = v \int dE \int_0^\infty dA \int_0^\infty d\Delta\epsilon \, N_i(\Delta\epsilon, A, E) \exp\left(-\frac{\pi\,\Delta\epsilon^2}{2\hbar A v}\right), \tag{1.12}$$

где $\Delta\epsilon$ и A — параметры запрещенного пересечения термов

$$E_i - E_{i-1} = \sqrt{\Delta\epsilon^2 + A^2(X - X_0)^2}, \tag{1.13}$$

E — энергия, на которой произошло пересечение ($E_i \approx E_{i-1} \approx E$), а $N_i(\Delta\epsilon, A, E)$ — число столкновений уровней с заданными параметрами на единицу смещения X. Выражение (1.12) написано для переходов между состояниями с положительной либо отрицательной энергией, т. е. при $i \neq 0$. Уравнение для скорости перехода между уровнями $E_{-1} = -E_0$ и E_0 отличается от (1.12) тем, что не содержит усреднения по E, т. к. в этом случае E_0 совпадает с $\Delta\epsilon/2$:

$$R_0 = v \int_0^\infty dA \int_0^\infty d\Delta\epsilon \, N_0(\Delta\epsilon, A) \exp\left(-\frac{\pi\,\Delta\epsilon^2}{2\hbar A v}\right). \tag{1.14}$$

Для стандартных Вигнер-Дайсоновских ансамблей вероятность столкновения двух уровней не зависит от энергии E, так что усреднение по E в уравнении (1.12) можно исключить. В этом случае получается приведенное выше выражение (1.10) для скорости перехода в единицу времени. Квадратичная зависимость R_∞ от скорости связана с квадратичным поведением парного коррелятора уровней [3] ($x \equiv \Delta\epsilon/\hbar\omega_0$)

$$r^{(U)}(E, E+\Delta\epsilon) = \frac{1}{(\hbar\omega_0)^2}\left[1 - \frac{\sin^2(\pi x)}{(\pi x)^2}\right] = \beta_\infty(\Delta\epsilon)^2 + O((\Delta\epsilon)^3) \qquad (1.15)$$

при малых расстояниях между уровнями, $x \ll 1$. Для случая класса C выражение (1.10) для переходов с $i \neq 0$ должно быть модифицировано с учетом зависимости $N_i(E, \epsilon, A)$ от энергии E, на которой произошло столкновение уровней. Легко показать, что в этом случае вероятность переходов может быть представлена в виде

$$R_i = R_\infty \int_0^\infty dE\, \frac{\beta_i(E)}{\beta_\infty}, \qquad (1.16)$$

где $\beta_i(E)$ — коэффициент при квадратичном по $\Delta\epsilon$ члене в условном «парном корреляторе» уровней:

$$r_i(E) = \langle \rho(E)\rho(E+\Delta\epsilon)w_i(E)\rangle = \beta_i(E)(\Delta\epsilon)^2 + O((\Delta\epsilon)^3), \qquad (1.17)$$

где $w_i(E)$ — вероятность того, что в интервале от 0 до E находятся ровно $i-1$ уровень.

Вычислить $\beta_i(E)$ для произвольного $i \sim 1$ не представляется возможным, т. к. в силу наличия величины $w_i(E)$ в выражении (1.17), оно не сводится к парному коррелятору уровней, а выражается через все высшие корреляторы. Однако, масштаб эффекта можно оценить, вычислив *интегральное* отличие скоростей переходов от R_∞, обусловленное отличием класса C от унитарного ансамбля при $i \sim 1$:

$$\delta R = \sum_i [R_i - R_\infty]. \qquad (1.18)$$

Величина δR может быть представлена в виде суммы $\delta R_- + \delta R_0 + \delta R_+$ от переходов R_i с $i < 0$, $i = 0$ и $i > 0$ соответственно. Ясно, что $\delta R_- = \delta R_+$. Оказывается, что значение δR_+ может быть вычислено точно. Действительно, его можно представить в виде

$$\frac{\delta R_+}{R_\infty} = \lim_{M\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{M}\int_0^\infty dE\, \frac{\beta_i(E)}{\beta_\infty} - M\right] = \lim_{M\to\infty}\left[\int_0^\infty dE\, \frac{\beta(E)}{\beta_\infty}\, W_M(E) - M\right], \quad (1.19)$$

где $\beta(E)$ — коэффициент в корреляторе плотность-плотность для класса C [10] ($x_i = E_i/\hbar\omega_0$):

$$r(E_1,E_2) = \langle\rho(E_1)\rangle\langle\rho(E_2)\rangle - \frac{1}{(\hbar\omega_0)^2}\left(\frac{\sin\pi(x_1-x_2)}{\pi(x_1-x_2)} - \frac{\sin\pi(x_1+x_2)}{\pi(x_1+x_2)}\right)^2$$
$$= \beta(E)(\Delta\epsilon)^2 + O((\Delta\epsilon)^3). \tag{1.20}$$

Здесь $\langle\rho(E_1)\rangle$ — средняя плотность состояний для класса C ($x = E/\hbar\omega_0$):

$$\langle\rho(E)\rangle = \frac{1}{\hbar\omega_0}\left(1 - \frac{\sin 2\pi x}{2\pi x}\right), \tag{1.21}$$

$W_M(E) = \langle\theta(M - N(E))\rangle$, а $N(E)$ — число уровней в полосе $[0, E]$. В результате, (1.19) оказывается равным

$$\frac{\delta R_+}{R_\infty} = \int_0^\infty dE\left(\frac{\beta(E)}{\beta_\infty} - 1\right) + \int_0^\infty dE\left(1 - \frac{\langle\rho(E)\rangle}{\rho_\infty}\right) = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}. \tag{1.22}$$

Итак, специфика класса C проявляется в уменьшении скорости переходов между состояниями с положительной (отрицательной) энергией вблизи уровня Ферми. Так же, как и для Вигнер-Дайсоновских ансамблей, вероятности этих переходов определяются парным коррелятором уровней.

Скорость перехода R_0 между состояниями $-E_0$ и E_0 с пересечением уровня Ферми не выражается через парный коррелятор, но может быть вычислена по аналогии с [27]. Пусть при $X = 0$ гамильтониан равен H; матрицу H без ограничения общности можно считать диагональной. Запишем инфинитезимальную динамику гамильтониана в виде $H(X) = H + VX + O(X^2)$. Для гауссового случайного потенциала распределения случайных матриц H и V оказываются независимыми, причем распределение V описывается плотностью вероятности

$$\mathcal{P}(V) \propto \exp\left(-\frac{1}{4\sigma^2}\operatorname{Tr} V^2\right), \tag{1.23}$$

где $\sigma^2 = (\hbar\omega_0)^2 C(0)$ — размерный коррелятор скоростей уровней. Величина коэффициента в экспоненте определятся симметрией матриц класса C, которая, согласно [10], имеет вид

$$V = \begin{pmatrix} a & b \\ b^+ & a^T \end{pmatrix}; \qquad a = a^+, \quad b = b^T, \tag{1.24}$$

так что $\langle|a_{nn}|^2\rangle = \sigma^2$ в соответствии с определением (1.4).

При рассмотрении перехода $-1 \leftrightarrow 0$ достаточно ограничиться двумя соответствующими уровнями:

$$H_{-1\leftrightarrow 0} = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & -E_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e & h \\ h^* & -e \end{pmatrix} X + O(X^2). \tag{1.25}$$

Этот двухуровневый гамильтониан описывает столкновение уровней с параметрами (ср. (1.13))

$$A^2 = 4(e^2 + |h|^2), \quad X_0 = \frac{4eE_0}{A^2}, \quad \Delta\epsilon = \frac{4|h|E_0}{A^2}. \tag{1.26}$$

Число столкновений уровней на единицу длины дается выражением (ср. [27])

$$N_0(\Delta\epsilon, A) = \int_0^\infty \rho_0(E_0)dE_0 \int_{-\infty}^\infty \mathcal{P}(e)de \int_{-\infty}^\infty \mathcal{P}(h)d^2h \times \\ \times \delta(X_0)\,\delta\left(2\sqrt{e^2+|h|^2} - A\right)\delta\left(\frac{4|h|E_0}{A} - \Delta\epsilon\right). \tag{1.27}$$

Здесь $\rho_0(E_0)$ — вероятность первому положительному уровню иметь энергию E_0, а плотности распределения величин e и h следуют из уравнения (1.23):

$$\mathcal{P}(e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{e^2}{2\sigma^2}\right), \qquad \mathcal{P}(h) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{|h|^2}{2\sigma^2}\right). \tag{1.28}$$

В силу того, что в мезоскопическом пределе интеграл по E_0 набирается с малых энергий, можно пренебречь отличием $\rho_0(E_0)$ от средней плотности состояний $\langle\rho(E_0)\rangle$ (1.21). Вычисляя (1.27), получим для числа пересечений на единицу смещения вихря:

$$N_0(\Delta\epsilon, A) = \frac{\pi^{3/2}}{3\cdot 2^{11/2}}\frac{\Delta\epsilon}{(\hbar\omega_0)^3}\frac{A^3}{\sigma^3}\exp\left(-\frac{A^2}{8\sigma^3}\right). \tag{1.29}$$

Подставляя $N_0(\Delta\epsilon, A)$ в уравнение (1.14) и выполняя интегрирование, получим ответ для скорости переходов R_0:

$$R_0 = \frac{1}{2}R_\infty, \tag{1.30}$$

где R_∞ дается формулой (1.10).

Таким образом мы показали, что в случае класса C вероятности переходов оказываются подавленными для переходов между уровнями вблизи энергии Ферми. Вклады в интегральный дефект δR (1.18) от переходов между отрицательными, между положительными, и между уровнями $-E_0$ и E_0 оказывается одинаковым, так что для суммарного дефекта получаем $\delta R = -\frac{3}{2}R_\infty$.

5. Фононная релаксация состояний киральной ветви

Рассмотрим сначала электрон-фононное взаимодействие состояний киральной ветви за счет деформационного потенциала. Гамильтониан взаимодействия имеет вид [29]:

$$H_{int} = g \int \hat{\psi}^{+}(\mathbf{r})\hat{\psi}(\mathbf{r})\hat{\varphi}(\mathbf{r})d^2\mathbf{r}, \qquad (1.31)$$

где g — константа электрон-фононного взаимодействия, $\hat{\psi}(\mathbf{r})$ — вторично-квантованный оператор, выражаемый через волновые функции $\Psi_\mu(\mathbf{r})$ локализованных состояний, приведенные в уравнении (2.13), $\hat{\varphi}(\mathbf{r})$ — оператор фононного поля.

Рассмотрим матричный элемент перехода из чистого состояния $|\mu\rangle$ в состояние $|\nu\rangle$ с излучением трехмерного фонона с импульсом $\mathbf{q}$ при нуле температур:

$$H_{\nu\mu}(\mathbf{q}) = g\sqrt{\frac{sq}{2V}} \int \Psi_\nu^{+}(\mathbf{r})\tau_z\Psi_\mu(\mathbf{r})e^{i\mathbf{q}_{\|}\mathbf{r}}d^2\mathbf{r}, \qquad (1.32)$$

здесь s — скорость звука, V — объем системы, τ_z — матрица Паули в Намбу пространстве, $\mathbf{q}_{\|}$ — проекция волнового вектора фонона на сверхпроводящую плоскость. Подставляя явное выражение (2.13) для волновой функции и выполняя угловое интегрирование, получим (с точностью до фазы):

$$H_{\nu\mu}(\mathbf{q}) = 2\pi g\sqrt{\frac{sq}{2V}}A^2 \int_0^\infty \Big(J_{\mu-1/2}(k_F r)J_{\nu-1/2}(k_F r) - J_{\mu+1/2}(k_F r)J_{\nu+1/2}(k_F r)\Big) \times$$
$$\times\, e^{-2K(r)}J_{\mu-\nu}(q_{\|}r)r\,dr, \qquad (1.33)$$

где величины A и $K(r)$ определены, соответственно, в уравнениях (2.14) и (2.11). Вероятность излучательного перехода $|\mu\rangle \to |\nu\rangle$ может быть найдена с помощью правила Ферми:

$$w_{\nu\mu} = \frac{2\pi}{\hbar}\sum_{\mathbf{q}} \delta(\omega_0(\mu-\nu) - sq)|H_{\nu\mu}(\mathbf{q})|^2. \qquad (1.34)$$

Оценим аргумент функции Бесселя $J_{\mu-\nu}(q_{\|}r)$ при $r \sim \xi$, что является характерным размером локализованного состояния в ядре вихря:

$$q\xi \sim \frac{\omega_0\xi}{s}(\mu-\nu) \sim \frac{\Delta}{\Omega_D}(\mu-\nu), \qquad (1.35)$$

где $\Omega_D \gg \Delta$ — дебаевская частота. Таким образом, аргумент последней функции Бесселя в уравнении (1.33) оказывается много меньше ее индекса, и мы можем ограничиться первым членом разложения. Используя длинноволновую асимптотику волновых функций в уравнении (1.33), находим

$$H_{\nu\mu}(\mathbf{q}) = 4g\sqrt{\frac{sq}{2V}}\frac{A^2}{k_F^2}\frac{(q_{\|}/2)^{\mu-\nu}}{(\mu-\nu)!}(\mu-\nu)\sin\frac{\pi}{2}(\mu-\nu)\int_0^\infty e^{-2K(r)}r^{\mu-\nu-1}dr. \qquad (1.36)$$

Интеграл определяется большими $r \sim \xi$ и, в результате, получаем оценку

$$H_{\nu\mu}(\mathbf{q}) \sim g\sqrt{\frac{sq}{V}}\frac{(q_{\|}\xi)^{\mu-\nu}}{k_F\xi}\frac{(\mu-\nu)}{(\mu-\nu)!}\sin\frac{\pi}{2}(\mu-\nu). \tag{1.37}$$

Подставляя выражение (1.37) в уравнение (1.34), после интегрирования по направлениям вектора $\mathbf{q}$ получим

$$w_{\nu\mu} \sim g^2\left(\frac{\omega_0}{s}\right)^3\left(\frac{\omega_0\xi}{s}\right)^{2(\mu-\nu)}\frac{1}{(k_F\xi)^2}\frac{(\mu-\nu)^{2(\mu-\nu)+3}}{(2(\mu-\nu)+1)!}(\mu-\nu)^2\sin^2\frac{\pi}{2}(\mu-\nu). \tag{1.38}$$

Итак,

$$\frac{w_{\nu\mu}}{\omega_0} \sim \left(\frac{\Delta}{E_F}\right)^3\left(\frac{\Delta}{\hbar\Omega_D}\right)^{2(\mu-\nu)+3}\frac{(\mu-\nu)^{2(\mu-\nu)+5}}{(2(\mu-\nu)+1)!}\,\delta_{(\mu-\nu-1)\,\mathrm{mod}\,2}. \tag{1.39}$$

Основная зависимость $w_{\nu\mu}$ от расстояния между уровнями определяется экспоненциально убывающим множителем $(\Delta/\hbar\Omega_D)^{2(\mu-\nu)+3}$. Тем самым, скорость фононной релаксации существенно отлична от нуля только для переходов между соседними уровнями, для которых

$$\frac{w_{\mu,\mu-1}}{\omega_0} \sim \left(\frac{\Delta}{E_F}\right)^3\left(\frac{\Delta}{\hbar\Omega_D}\right)^5 \ll 1. \tag{1.40}$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что скорость фононной релаксации состояний киральной ветви, локализованной в ядре вихря, за счет взаимодействия с деформационным потенциалом является ничтожной по сравнению со средним расстоянием между уровнями. Физически это связано с тем, что длина волны излучаемого фонона значительно превосходит область локализации квазичастицы. Поэтому необходимо рассмотреть иной механизм электрон-фононного взаимодействия, который мог бы конкурировать с процессами зенеровской накачки.

Искомым механизмом является электрон-фононное взаимодействие на примесях. При деформации решетки вместе с нею смещаются и примеси, т. е. квазичастицы «видят» эффективный периодически меняющий во времени высокочастотный потенциал, который приводит к переходам с излучением фонона. Гамильтониан взаимодействия имеет вид

$$H_{int} = \int \hat{\psi}^+(\mathbf{r})\hat{\psi}(\mathbf{r})[U(\mathbf{r}+\lambda\hat{\mathbf{u}}_{\|}) - U(\mathbf{r})]d^2\mathbf{r}. \tag{1.41}$$

Здесь $\hat{\mathbf{u}}_{\|}$ — оператор смещения решетки, спроецированный на плоскость сверхпроводящих слоев, а λ — константа порядка единицы, зависящая от отношения m/m_* массы свободного электрона к эффективной массе в кристалле; она определяет эффективный «коэффициент неувлечения» электрона решеткой: при $m_* = m$ положение электрона не меняется при смещении решетки, в то время как при $m_* \to \infty$ электрон «накрепко прибит» к решетке и следует за ее деформацией.

Рассмотрим переход из (грязного) состояния m в состояние n с излучением фонона при нуле температур. Матричный элемент этого процесса дается выражением

$$H_{nm} = \lambda \sqrt{\frac{\hbar}{2V\rho s_\alpha q}} \frac{\partial H_{nm}}{\partial X} |\mathbf{e}_{||}^\alpha|, \tag{1.42}$$

где ρ — массовая плотность кристалла, s_α — скорость звука для поляризации с вектором $\mathbf{e}^\alpha$. Возводя по модулю в квадрат и усредняя по реализациям случайного потенциала с помощью уравнения (1.23), получаем

$$\langle |H_{nm}|^2 \rangle = \frac{\hbar \lambda^2 \sigma^2}{4V\rho s_\alpha q} |\mathbf{e}_{||}^\alpha|^2. \tag{1.43}$$

Применяя золотое правило Ферми и суммируя по всем поляризациям, получим для скорости переходов с излучением фонона энергии ω:

$$\Gamma(\omega) = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_\alpha \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \delta(\omega - s_\alpha q) \langle |H_{nm}|^2 \rangle = \frac{\lambda^2 \sigma^2}{4\pi\rho}\, \omega \sum_\alpha \frac{1}{s_\alpha^3} \int \frac{do}{4\pi} |\mathbf{e}_{||}^\alpha|^2. \tag{1.44}$$

Усредняя по углам и вводя среднюю скорость звука s согласно

$$\frac{3}{s^3} = \frac{1}{s_l^3} + \frac{2}{s_t^3}, \tag{1.45}$$

получим окончательно

$$\Gamma(\omega) = \gamma_{\rm ph} \omega, \tag{1.46}$$

где безразмерная константа

$$\gamma_{\rm ph} = \frac{\lambda^2 \sigma^2}{2\pi\rho s^3} = \frac{\lambda^2}{2\pi} \frac{(\omega_0 \tau) \hbar \omega_0^2 n_{2D}}{\rho s^3} \sim (\omega_0 \tau) \frac{\hbar \omega_0^2}{\Omega_D E_F} \ll 1. \tag{1.47}$$

6. Вычисление скорости диссипации

Согласно результатам предыдущего раздела, столкновительный член в кинетическом уравнении (1.9) определяется электрон-фононным взаимодействием на примесях и, с учетом (1.46), имеет вид

$$\mathrm{St}_{\mathrm{ph}} = -\omega_0\gamma_{\mathrm{ph}}\left(\sum_{j<i}(i-j)f_i[1-f_j] - \sum_{j>i}(j-i)f_j[1-f_i]\right). \qquad (1.48)$$

Для решения уравнения (1.9) со столконовительным членом (1.48) примем во внимание малость константы γ_{ph}, в результате чего характерная ширина i_{char} стационарной неравновесной функции распределения f_i^{st} оказывается много больше расстояния ω_0 между уровнями. Следовательно, вклад уровней с $i \sim 1$, где происходит подавление скорости зенеровского туннелирования, обсуждавшееся в разделе 4, в скорость диссипации энергии $\partial W/\partial t$ является малым по параметру $1/i_{\mathrm{char}}$. Для оценки i_{char} можно пренебречь отличием R_i от R_∞, тогда уравнение на стационарную функцию распределения примет вид

$$R_\infty\frac{\partial^2 f^{\mathrm{st}}}{\partial i^2} = \omega_0\gamma_{\mathrm{ph}}\left(\sum_{j<i}(i-j)f_i^{\mathrm{st}}[1-f_j^{\mathrm{st}}] - \sum_{j>i}(j-i)f_j^{\mathrm{st}}[1-f_i^{\mathrm{st}}]\right). \qquad (1.49)$$

Левую часть этого уравнения можно оценить как $R_\infty/i_{\mathrm{char}}^2$, в то время как правая имеет порядок $\omega_0\gamma_{\mathrm{ph}}i_{\mathrm{char}}^2$. Приравнивая их друг другу, получим оценку на размер функции распределения:

$$i_{\mathrm{char}} \sim \left(\frac{R_0}{\gamma_{\mathrm{ph}}\omega_0}\right)^{1/4} \sim \sqrt{\frac{v}{v_K}}\left(\frac{\Omega_D E_F}{\hbar\omega_0^3\tau}\right)^{1/4}. \qquad (1.50)$$

Обычно i_{char} велико, поскольку v ограничена снизу критической скоростью депиннинга v_c (оценка для v_c/v_K будет приведена в разделе 7), тогда как второй сомножитель в уравнении (1.50) всегда велик. Можно сказать, что величина i_{char} определяет некоторую «эффективную локальную температуру» локализованных в ядре электронов: $T_{\mathrm{eff}}(v) \sim \hbar\omega_0 i_{\mathrm{char}} \gg \hbar\omega_0$. В то же время, необходимо отметить, что T_{eff} оказывается меньше Δ, и, таким образом, наше рассмотрение только состояний киральной ветви, является оправданным.

Как отмечалось выше, скорость диссипации энергии для унитарного ансамбля в мезоскопическом пределе ($R_i = R_\infty$) совпадает с результатом в режиме применимости формулы Кубо. Поправка $\eta - \eta_{\mathrm{Kubo}}$ определяется скоростями переходов R_i с $i \sim 1$. Как показано в разделе 4, скорости переходов между уровнями вблизи ферми-поверхности оказываются подавленными: $R_0 = R_\infty/2$, и интегральный вклад $\sum_{i\neq 0}[R_0 - R_\infty] = -R_\infty$. Соответствующее уменьшение коэффициента трения вихря пропорционально производной стационарной функции распределения f_0^{st} на уровне Ферми и, с учетом (1.50), может быть оценено как

$$\frac{\eta}{\eta_{\text{Kubo}}} = 1 - \nu\sqrt{\frac{v_K}{v}} \cdot \gamma_{\text{ph}}^{-1/4}, \tag{1.51}$$

где ν — число порядка единицы.

Уравнение (1.51) вместе с соотношением $v = cE/B$ (c — скорость света), связывающим скорость вихря и электрическое поле, приводят к тому, что продольная проводимость σ_{xx} в режиме течения потока оказывается меньше своего квазиклассического значения (1.1) и зависит от приложенного электрического поля:

$$\sigma_{xx} \leq \frac{ecn}{B}\omega_0\tau\left(1 - \sqrt{\frac{E_*}{E}}\right); \quad E_* \approx \frac{\omega_0^2 B}{c}\sqrt{\frac{\hbar}{\rho s^3}}. \tag{1.52}$$

Характерная величина электрического поля E_*, определяющая масштаб нелинейности проводимости, очень мала, так что в области применимости нашей теории всегда выполняется условие $E \gg E_*$. Отметим, что согласно (1.52) проводимость *растет* с увеличением электрического поля (или тока), в противоположность известному результату вблизи классического перехода депиннинга вихрей [30]. Рассматриваемый механизм нелинейности также отличается от предсказанного в работе [31], где характерный масштаб нелинейности по полю на несколько порядков больше E_*.

Хотя окончательный результат для σ_{xx} достаточно близок к тому, что получается в рамках квазиклассического приближения (предполагающего непрерывный электронный спектр), внутренний механизм диссипации в мезоскопическом пределе существенно отличается. Скорость диссипации энергии может быть представлена в виде произведения скорости неупругих соударений R_{in} на характерную энергию δE, передаваемую при каждом соударении. В нашей картине, соответствующей мезоскопическому пределу, R_{in} оказывается много меньше, чем в квазиклассическом подходе, тогда как δE практически во столько же раз превосходит свое квазиклассическое значение.

7. Область применимости

Рассмотрим сначала условия, необходимые для реализации мезоскопического предела. Как отмечено в разделе 1, для этого необходимо, чтобы полная неупругая ширина Γ была меньше расстояния между уровнями ω_0. Вклад в ширину за счет электрон-электронного взаимодействия дается формулой $\Gamma_{e-e} \sim T^2/E_F$ и оказывается меньше ω_0 при всех температурах ниже Δ, когда возможно ограничиться рассмотрением локализованных состояний. Электрон-фононное взаимодействие, согласно (1.46), также оказывается достаточно слабым. Таким образом, применимость мезоскопического описания определяется неупругой шириной Γ_v, обусловленной переходами за счет движения вихря. В соответствии с уравнением (1.8), наш результат (1.52) справедлив в области не очень больших плотностей тока $j \leq j_K = j_0(k_F l)^{-1/2}$, где $j_0 \sim en\Delta/p_F$ — плотность тока распаривания.

С другой стороны, плотность тока должна быть выше критической j_c, которая определяется пиннингом вихря на потенциале примесей. Критическая плотность тока для пиннинга отдельного двумерного (pancake) вихря в слоистом сверхпроводнике в слабых магнитных полях может быть оценена [30] как $j_c \approx j_0(0.1\sigma_{\rm imp}/ld)^{1/2}$, где $\sigma_{\rm imp} = (ln_i)^{-1}$ — сечение рассеяния электрона на примеси (n_i — концентрация примесей). Следовательно, условие согласованности нашей теории может быть записано в виде $5 \cdot 10^{-2} k_F \sigma_{\rm imp}/d \ll (\omega_0 \tau)^2 \leq 1$. Таким образом, предлагаемый сценарий может реализовываться в случае очень слабых примесей с сечением, малым на атомном масштабе. Отметим, что в действительности условие может оказаться более слабым вследствие падения j_c с магнитным полем уже при $B \ll H_{c2}$ [30]. Мы полагаем, что необходимые условия для наблюдения нелинейных вольт-амперных характеристик могут выполняться в чистых кристаллах слоистого сверхпроводника $NbSe_2$, где основной источник беспорядка связан со случайными замещениями части Nb атомами Ta, что, как известно, создает очень слабые примесные центры [32].

Применимость излагаемой теории к трехмерной геометрии ограничена условием $T_{\rm eff} \ll \hbar\omega_0(m_c/m_a)$, когда можно не учитывать зонную структуру уровней и рассматривать чисто двумерную ситуацию.

При выводе столкновительного члена в кинетическом уравнении использовалось нуль-температурное выражение (1.46) для скорости электрон-фононной релаксации. Тем самым, результат (1.51) справедлив вплоть до температур $T \leq T_{\rm eff}(v)$; при бо́льших T ширина $f_i^{\rm st}$ и коэффициент вязкости определяются температурой, а не скоростью вихря.

Наконец, обсудим возможность использования чисто классического кинетического уравнения (1.9) для функции распределения. Оно справедливо, если можно пренебречь фазовой когерентностью электронных состояний на масштабе времени порядка R_∞^{-1} между двумя последовательными зенеровскими переходами. В противном случае необходимо учесть эффекты локализации, обусловленные фазовой когерентностью, которые рассматривались в работах [33,34] для задачи об электронном транспорте в мезоскопических кольцах. Наш случай значительно отличается от того, который исследовался в работах [33,34], т. к. электроны в ядре движущегося вихря чувствуют случайный потенциал, *непериодически* зависящий от времени. Случайная фаза, набираемая двумя соседними состояниями между последовательными зенеровскими туннелированиями, имеет порядок $\Delta\phi \sim (v_K/v)^2 \gg 1$ и приводит к потере квантовой когерентности. В связи с этим, стоит отметить, что эффекты квантовой когерентности и возможной локализации в энергетическом пространстве могут быть существенными при рассмотрении диссипации в ультрачистом пределе, когда спектр локализованных состояний оказывается сильно скоррелированным [24].

Глава II.

СТАТИСТИКА ЭЛЕКТРОННЫХ СОСТОЯНИЙ, ЛОКАЛИЗОВАННЫХ В ЯДРЕ ВИХРЯ

1. Постановка задачи

За последние полтора десятилетия достигнут значительный прогресс в описании электронных уровней энергии и волновых функций в неупорядоченных нормальных металлах [5]. В сверхпроводниках (с s-спариванием) беспорядок обычно играет меньшую роль, т. к. спектр возбуждений имеет щель, и одночастичные состояния практически незаполнены при $T \ll \Delta$. Иная ситуация возникает для смешанных систем сверхпроводник – нормальный металл [8], где величина щели в спектре возбуждений может быть либо очень малой по сравнению с объемной Δ, либо строго нулевой. В качестве примера, когда реализуется первый случай, приведем S-N-S «сэндвич» при разности фаз φ между сверхпроводниками, отличной от π, в котором толщина L_N области нормального металла значительно превосходит сверхпроводящую длину когерентности ξ и длину свободного пробега l. В этом случае щель в электронном спектре нормального металла имеет порядок энергии Таулесса $E_{Th} = D/L_N^2 \ll \Delta$. Недавно Алтландом, Саймонсом и Тарас-Семчуком [9] для вычисления флуктуаций плотности состояний при $\epsilon > E_{Th}$, а также других мезоскопических эффектов была выведена теория поля, являющаяся аналогом суперматричной σ-модели Ефетова с учетом наведенных в нормальном металле сверхпроводящих корреляций за счет эффекта близости. Они показали, что при достаточно низких энергиях, задача эквивалентна ортогональному ансамблю случайных матриц (при $\varphi = 0$) либо унитарному ансамблю (при $\varphi \gg \delta/E_{Th}$, где δ — расстояние между уровнями в нормальном металле). Так же, как и в случае нормального металла, мезоскопические флуктуации проявляются в величинах, содержащих произведения запаздывающей *и* опережающей функций Грина, в то время как одночастичная функция Грина определятся стандартными уравнениями квазиклассической теории сверхпроводимости.

Качественно иная задача возникает в случае, если щель для возбуждений в нормальном металле обращается в нуль, что реализуется, например, в том же S-N-S сэндвиче при $\varphi = \pi$ [35], либо в ситуации, когда фаза параметра порядка меняется в пространстве вследствие внешнего магнитного поля. Теперь плотность состояний является конечной при произвольно низких энергиях, и квантовая интерференция за счет андреевского рассеяния существенно меняет среднюю плотность состояний $\langle \rho(\epsilon) \rangle$ при $\epsilon \sim \delta$. Общий подход к описанию такого типа систем, характеризующихся нулевым *средним по пространству* сверхпроводящим параметром порядка, был предложен Алтландом и Цирнбауером [10], которые использовали модифицированную теорию случайных матриц. Ими было показано, что зеркальная симметрия уравнений Боголюбова – Де Жена приводит к дополнительным связям, которые необходимо наложить на матричный гамильтониан системы. Конкретная форма связей зависит от наличия или отсутствия симметрии по отношению к обращению времени и к повороту спина. Таким образом, Алтланд и Цирнбауер определили четыре дополнительных класса ансамблей случайных матриц (по отношению к стандартным Вигнер-Дайсоновским ансамблям), описывающих мезоскопические флуктуации в рассматриваемом типе S-N-S систем. Кроссовер между такими классам рассматривался в работе [36] с использованием не зависящей от пространственных координат (нульмерной) сигма модели. Подход Алтланда и Цирнбауера, будучи, несомненно, крайне полезным, имеет, однако, те же недостатки, что и любая абстрактная теория случайных матриц, т. к. границы ее применимости к реальной физической системе остаются неопределенными. Поэтому мы считаем крайне желательным разработать полностью микроскопическую теорию мезоскопических флуктуаций в S-N-S системах с нулевой щелью в спектре возбуждений.

В данной главе представлен микроскопический вывод теории поля, описывающей мезоскопические флуктуации плотности состояний для квазичастиц, локализованных в ядре вихря в сверхпроводнике II рода с s-спариванием, что является типичным примером систем с нулевым средним параметром порядка. Будут выведены условия, при которых статистика состояний в ядре вихря описывается теорий случайных матриц класса C и оценен масштаб, на котором становятся существенными неуниверсальные поправки к результату теории случайных матриц. Мы будем рассматривать чисто двумерный сверхпроводник, что является хорошим приближением для случая достаточно сильной слоистой анизотропии. Более подробно этот вопрос обсуждается в главе I.

Как упоминалось выше, в рассматриваемой задаче вычисление средних *одночастичных* величин нетривиально и не может быть осуществлено в рамках квазиклассической теории, если рассматриваются энергии, сравнимые со средним расстоянием ω_0 между уровнями. Для этой цели нами будет выведена эффективная теория поля, позволяющая получить непертурбативный результат. Средняя плотность состояний $\langle\rho(\epsilon)\rangle = \langle\sum_j \delta(\epsilon-\epsilon_j)\rangle$ может быть выражена через одночастичную функцию Грина, для усреднения которой по беспорядку будет использовано стандартное представление [5], в виде функционального интеграла по грассмановым (χ) и обычным комплексным (S) полям, объединяемым в одно суперполе. В разделах 2 – 5 разработан подход, основанный на использовании суперполей $\psi(\mathbf{r})$ в координатном пространстве, что соответствует стандартному представлению гамильтониана Боголюбова – Де Жена. В таком подходе теория поля формулируется в терминах суперматрицы $Q(\mathbf{r})$, зависящей от двух пространственных координат r_x, r_y. Седловое решение оказывается вырожденным при $\epsilon = 0$. Найдено и параметризовано седловое многообразие, интегрирование по которому дает ответ, совпадающий с результатом теории случайных матриц для класса C. Однако, продвинуться далее нульмерной σ-модели в координатном пространстве оказывается достаточно сложным, что связано с эффективной «одномерностью» низколежащих состояний киральной ветви. Действительно, киральная ветвь спектра описывается единственным квантовым числом (которое в отсутствие беспорядка есть просто угловой момент квазичастицы), что формально соответствует одномерной задаче. Следовательно, при рассмотрении низкоэнергетической физики гамильтониан может быть спроектирован на базис чистых состояний, в результате чего он становится (случайной) эрмитовой матрицей размера $N\times N$, где $N\sim\Delta/\omega_0$ — полное число локализованных состояний в ядре вихря. Соответствующее сведение исходной двумерной задачи к одномерной теории случайных матриц определенной симметрии и решение полученной редуцированной задачи с помощью эффективной одномерной суперсимметричной теории поля представлено в разделах 6 – 9.

В этой главе используется система единиц, в которой $\hbar = 1$.

2. Состояния, локализованные в ядре вихря

Исходным пунктом для описания электронных состояний, локализованных в ядре вихря, является уравнение Боголюбова – Де Жена [37]:

$$\mathcal{H}(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}) = \epsilon\Psi(\mathbf{r}). \tag{2.1}$$

Гамильтониан Боголюбова – Де Жена является матрицей размера 2×2:

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} H & \Delta \\ \Delta^* & -H^* \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

волновая функция $\Psi(\mathbf{r})$ — 2-компонентный вектор в пространстве Намбу:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_\uparrow \\ \Psi_\downarrow \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Здесь $\Delta(\mathbf{r})$ — сверхпроводящий параметр порядка, H — одночастичный гамильтониан, который при наличии магнитного поля и внешнего потенциала имеет вид:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{2e}{c}\mathbf{A}\right)^2 - E_F + U(\mathbf{r}). \tag{2.4}$$

Гамильтониан (2.2) обладает определенной симметрией. Легко показать, что если Ψ является собственной функцией уравнения (2.1), соответствующей энергии ϵ, то волновая функция

$$\tilde{\Psi} = \begin{pmatrix} \Psi_\downarrow^* \\ -\Psi_\uparrow^* \end{pmatrix} = i\tau_y \Psi^* \tag{2.5}$$

также оказывается собственной функцией с энергией $\tilde{\epsilon} = -\epsilon$. На уровне гамильтониана такая CT-антисимметрия может быть представлена в виде

$$\mathcal{H} = -(i\tau_y)\mathcal{H}^T(i\tau_y)^T, \tag{2.6}$$

где τ_i — матрицы Паули в пространстве Намбу (используемые обозначения приведены в Приложении A). Отметим, что частично-дырочная антисимметрия (2.6) является точной. Она имеет место для произвольных магнитного поля, потенциала $U(\mathbf{r})$, и даже закона дисперсии в уравнении (2.4).

Решение для параметра порядка, соответствующее вихрю с одним квантом потока, имеет вид $\Delta(\mathbf{r}) = \Delta(r)e^{-i\varphi}$, где φ — полярный угол, а $\Delta(r)$ — действительная функция, обращающаяся в нуль при $\mathbf{r} = 0$. Для решения уравнения (2.1) на фоне вихря, находящегося в начале координат, удобно совершить калибровочное преобразование:

$$\Psi(\mathbf{r}) \to e^{-i\varphi(\mathbf{r})\tau_z/2}\Psi(\mathbf{r}), \tag{2.7}$$

в результате которого гамильтониан (2.2) перейдет в

$$\mathcal{H} = \tau_z \left[\frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{\nabla\varphi}{2}\tau_z \right)^2 - E_F + U(\mathbf{r}) \right] + \Delta(r)\tau_x = \mathcal{H}_0 + \tau_z U(\mathbf{r}). \tag{2.8}$$

Здесь мы пренебрегли магнитным полем в ядре вихря, что является справедливым для сверхпроводников сильно второго рода с $\lambda \gg \xi$. Отметим, что новый гамильтониан (2.8) также подчиняется уравнению (2.6).

В отсутствии беспорядка дискретная ветвь спектра гамильтониана $\mathcal{H}_0$ была найдена Кароли, Де Женом и Матриконом [11] в 1964 году. В рамках квазиклассического приближения они нашли спектр локализованных состояний при энергиях $\epsilon \ll \Delta$. Позже этот спектр был выведен более изящным способом Воловиком [38], который также использовал квазиклассическое приближение. Также было показано, что число бесщелевых киральных ветвей спектра, пересекающих ферми-поверхность, совпадает с топологическим зарядом вихря [39]. Точное квантовое (не использующее квазиклассику) решение представлено в приложении Б. На плоскости состояния классифицируются угловым моментом квазичастицы μ, который после преобразования (2.7) становится полуцелым. Энергия μ-го уровня дается выражением:

$$\epsilon_\mu = \mu\omega_0. \tag{2.9}$$

Расстояние между уровнями ω_0 выражается через $\Delta(r)$ согласно

$$\omega_0 = \frac{\int_0^\infty \frac{\Delta(r)}{k_F r} e^{-2K(r)} dr}{\int_0^\infty e^{-2K(r)} dr}, \tag{2.10}$$

где

$$K(r) = \frac{1}{\hbar v_F} \int_0^r \Delta(r') dr'. \tag{2.11}$$

Межуровневое расстояние имеет порядок $\omega_0 \simeq \Delta^2/E_F$. Следовательно, число локализованных состояний киральной ветви можно оценить как

$$N \simeq \frac{E_F}{\Delta}. \tag{2.12}$$

Волновая функция состояния с моментом $|\mu\rangle$ имеет вид

$$\Psi_\mu(\mathbf{r}) = A \begin{pmatrix} J_{\mu-1/2}(k_F r) \\ J_{\mu+1/2}(k_F r) \end{pmatrix} e^{i\mu\varphi} e^{-K(r)}, \tag{2.13}$$

где нормировочный коэффициент

$$A^2 = \left[\frac{4}{k_F} \int_0^\infty e^{-2K(r)} dr \right]^{-1} \sim \frac{k_F}{\xi} \tag{2.14}$$

может считаться не зависящим от μ при $\epsilon_\mu \ll \Delta$ (т. е. при $\mu \ll N$). Состояния с другими радиальными квантовыми числами n_r имеют энергию порядка Δ и несущественны при рассмотрении низкоэнергетического поведения функции Грина.

В чистой системе плотность состояний $\rho(\epsilon)$ дается суммой δ-функций: $\rho(\epsilon) = \sum_\mu \delta(\epsilon - \mu)$. Введение в систему слабого беспорядка, перемешивает состояния с различными значениями μ, и спектр перестанет быть эквидистантным. Сила беспорядка определяется отношением обратного времени свободного пробега τ^{-1} к расстоянию между уровнями ω_0. В сверхчистом пределе ($\omega_0\tau \gg 1$), когда в ядре вихря находится не более одной примеси, спектр оказывается сильно скоррелированным [24]. В противоположном, умеренно чистом пределе ($\omega_0\tau \ll 1$) состояния сильно перемешиваются, так что можно ставить вопрос о статистических свойствах спектра, которые оказываются нетривиальными вследствие зеркальной симметрии собственных значений $\epsilon \leftrightarrow -\epsilon$.

Пусть $|n\rangle$ — точные, зависящие от реализации беспорядка состояния, являющиеся линейными комбинациями чистых состояний $|\mu\rangle$, а ϵ_n — соответствующие точные уровни энергии. Тогда запаздывающая матричная функция Грина может быть представлена в виде

$$\mathcal{G}^R(\epsilon) = \sum_n \frac{|n\rangle\langle n|}{\epsilon_+ - \epsilon_n}, \tag{2.15}$$

где ϵ_+ — краткое обозначение для $\epsilon + i\delta$, δ — бесконечно малое положительное число.

Плотность состояний выражается через функцию Грина стандартным образом:

$$\rho(\epsilon) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \operatorname{tr} \int d^2\mathbf{r} G^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \epsilon). \tag{2.16}$$

Здесь $G^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \epsilon) = \langle \mathbf{r}|\mathcal{G}^R(\epsilon)|\mathbf{r}'\rangle$ — функция Грина в координатном представлении, которая является 2×2 матрицей в пространстве Намбу; след в уравнении (2.16) также берется по пространству Намбу.

Уравнение (2.16) должно быть усреднено по различным реализациям случайного потенциала, который мы будем считать гауссовым δ-коррелированным с парным коррелятором

$$\langle U(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}')\rangle = \frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{2\pi\nu\tau}, \tag{2.17}$$

где ν — двумерная плотность состояний на поверхности Ферми, τ — время свободного пробега.

3. Суперсимметричная теория поля в координатном пространстве

Усреднение по беспорядку

В этом разделе мы представим функцию Грина в виде функционального интеграла по суперполям и выведем эффективную теорию поля, описывающую мезоскопические флуктуации средней плотности состояний. Полученная теория будет проанализирована в приближении среднего поля. При $\epsilon = 0$ седловая точка оказывается вырожденной, так что физика низколежащих состояний определяется практически бесщелевыми куперонными возбуждениями. Корреляции вблизи энергии Ферми определяются пространственно однородной голдстоуновской модой и описываются нульмерным пределом σ-модели. Критерий применимости приближения среднего поля требует более детального рассмотрения и будет выведен в разделе 7.

Для усреднения по случайному потенциалу запишем G^R через функциональный интеграл по супервекторам (существует несколько слегка различающихся техническими подробностями вариантов работы с суперсимметрией; мы следуем обозначениям Ефетова [5], см. Приложение A):

$$G^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \epsilon) = -i \int S(\mathbf{r}) S^+(\mathbf{r}') e^{-\mathcal{S}\{\phi(\mathbf{r})\}} D\phi^* D\phi \tag{2.18}$$

с действием

$$\mathcal{S}\{\phi(\mathbf{r})\} \equiv \int L\{\phi(\mathbf{r})\} d^2\mathbf{r} = -i \int \phi^+(\mathbf{r})[\epsilon_+ - \mathcal{H}]\phi(\mathbf{r}) d^2\mathbf{r}. \tag{2.19}$$

Здесь

$$\phi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \chi(\mathbf{r}) \\ S(\mathbf{r}) \end{pmatrix}, \tag{2.20}$$

$\chi(\mathbf{r})$ и $S(\mathbf{r})$ — соответственно, грассмановы (фермионные) и обычные комплексные (бозонные) поля, которые являются к тому же векторами в пространстве Намбу.

Следующим шагом необходимо ввести 8-компонентное поле ψ, которое содержит как поля χ, S, так и сопряженные к ним. Это требуется для того, чтобы сделать возможным все типы спаривания в преобразовании Хаббарда-Стратоновича, что позволит учесть непертурбативные эффекты, обусловленные симметрией (2.6). Можно было бы определить ψ как $\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi, \phi^*)^T$. Однако, при таком определении ψ промежуточные вычисления окажутся сильно усложненными, т. к. запутаются пространства Намбу и ϕ–ϕ^*. Поэтому мы используем другой способ удвоения пространства, при котором симметрия (2.6) гамильтониана (2.8) учитывается явно (ср. рассмотрение магнитных примесей в работе Ефетова [5]):

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi \\ i\tau_y \phi^* \end{pmatrix}, \qquad \psi^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi^+ & \phi^T k i \tau_y \end{pmatrix}, \tag{2.21}$$

где матрица k, нарушающая симметрию между фермионами и бозонами, определена в приложении A. Удвоение числа переменных приводит к появлению дополнительного пространства, которое будет именоваться пространством «частица-дырка», а блоки ϕ и $i\tau_y\phi^*$ — P (particle) и H (hole) блоками соответственно. Матрицы Паули в пространстве PH будут обозначаться через σ_i.

По построению, суперполе ψ удовлетворяет условию симметрии:

$$\psi^+ = (S\psi)^T, \qquad S = -i\tau_y \otimes C_0, \tag{2.22}$$

где матрица C_0 имеет вид

$$C_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ k & 0 \end{pmatrix}_{ph}. \tag{2.23}$$

Выразив лагранжиан через суперполе $\psi(\mathbf{r})$, получим:

$$L\{\psi(\mathbf{r})\} = -i\psi^+ \left[\epsilon_+ - \sigma_z \mathcal{H}\right] \psi. \tag{2.24}$$

Появление матрицы σ_z в этом выражении связано с антисимметрией гамильтониана $\mathcal{H}$. Отметим, что PH-пространство, в котором действует матрица Паули σ_z, отлично от пространства Намбу: первое является вспомогательным пространством, введенным для учета всех возможных типов спаривания в приближении среднего поля, тогда как второе — это внутреннее пространство гамильтониана.

Определим операцию зарядового сопряжения супервекторов:

$$\bar\psi = \psi^+ \sigma_z \tau_z = (C\psi)^T, \tag{2.25}$$

так что потенциал примесей $U(\mathbf{r})$ входит в лагранжиан в виде члена $\bar\psi(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})U(\mathbf{r})$. Матрица

$$C = \sigma_z \tau_z S = -\tau_x \otimes \sigma_z C_0, \tag{2.26}$$

служит также для определения зарядового сопряжения суперматриц:

$$\bar{A} = C A^T C^T. \tag{2.27}$$

Теперь можно легко усреднить уравнение (2.18) по примесям, что приводит к следующему лагранжиану:

$$L\{\psi(\mathbf{r})\} = -i\bar{\psi}\left[\epsilon_+ \tau_z \sigma_z - \tau_z \mathcal{H}_0\right]\psi + \frac{1}{4\pi\nu\tau}(\bar{\psi}\psi)^2. \tag{2.28}$$

Следующим шагом необходимо расцепить член четвертого порядка с помощью преобразования Хаббарда-Стратоновича, в котором вводится 8×8 суперполе $P(\mathbf{r})$, что соответствует выделению вкладов медленно меняющихся в пространстве средних $\langle \psi\bar{\psi}\rangle_{sl}$ и $\langle \psi\psi^T\rangle_{sl}$. Из определения $\bar{\psi}$ следует, что оба типа спаривания дают одинаковый вклад в член четвертого порядка, который, таким образом, может быть записан с помощью суперследа как

$$(\bar{\psi}\psi)^2 = -2\,\mathrm{Str}(\psi \otimes \bar{\psi})^2_{sl}. \tag{2.29}$$

Расцепление по Хаббарду-Стратоновичу приводит к следующему лагранжиану:

$$L\{\psi(\mathbf{r}), P(\mathbf{r})\} = -i\bar{\psi}\left[\epsilon_+ \tau_z \sigma_z - \tau_z \mathcal{H}_0 + \frac{i}{2\tau}P\right]\psi + \frac{\pi\nu}{8\tau}\,\mathrm{Str}\,P^2. \tag{2.30}$$

На этом этапе необходимо обсудить свойства симметрии суперполя P. Во-первых, оно обязано иметь равное число коммутирующих и антикоммутирующих переменных, чтобы гарантировать правильную нормировку $\int \exp\left(-\frac{\pi\nu}{8\tau}\,\mathbf{Str}\,P^2\right) DP = 1$. Вторым очевидным требованием является сходимость интегрирования по P. Наконец, число независимых переменных в P должно быть больше или равно числу независимых переменных в диадном произведении $\psi \otimes \bar{\psi}$, чтобы сдвиг $P \to P - (2/\pi\nu)\psi \otimes \bar{\psi}$ в преобразовании Хаббарда-Стратоновича был согласован с симметрией суперматрицы P.

На первый взгляд, наиболее естественным является требование, чтобы симметрия P совпадала с симметрией $\psi \otimes \bar{\psi}$. Однако, хорошо известно [40], что такой подход не согласуется со сходимостью теории, что приводит к необходимости изменения симметрии фермион-фермионного сектора P по сравнению с $\psi \otimes \bar{\psi}$. Эта процедура известна под названием компактификации [40,41]. Мы используем другой подход, который свободен от произвольных предположений и основывается на анализе сходимости выводимой σ-модели. Мы не будем накладывать никаких симметрийных ограничений на P на уровне преобразования Хаббарда-Стратоновича. Единственным требованием является математическая корректность проводимого интегрирования. Окончательная параметризация седлового многообразия определяется из анализа формулы интегрирования по ψ вместе с условием сходимости σ-модели.

Проинтегрировав по ψ с помощью уравнения (B20), получим эффективное действие для поля P:

$$\mathcal{S}[P] = -\frac{1}{2}\,\mathbf{Str}\ln\hat{\mathcal{P}}\left\{\tau_z\mathcal{H}_0 - \epsilon_+\sigma_z\tau_z - \frac{i}{2\tau}P\right\} + \frac{\pi\nu}{8\tau}\,\mathrm{Str}\int P^2 d^2\mathbf{r}, \tag{2.31}$$

где $\mathbf{Str}$ обозначает полный след оператора, включающий матричный суперслед и след в координатном пространстве. Важной особенностью этой формулы является наличие оператора проектирования $\hat{\mathcal{P}}$, действующего согласно

$$\hat{\mathcal{P}}\mathcal{A} = \frac{\mathcal{A}+\bar{\mathcal{A}}}{2}. \tag{2.32}$$

Заметим, что $\hat{\mathcal{P}}(\tau_z\mathcal{H}_0) = \tau_z\mathcal{H}_0$ и $\hat{\mathcal{P}}(\sigma_z\tau_z) = \sigma_z\tau_z$. Тогда, используя свойство $\mathrm{Str}\ln(-\tau_z) = 0$, мы можем переписать (2.31) в виде

$$\mathcal{S}[P] = -\frac{1}{2}\,\mathbf{Str}\ln\left\{\epsilon_+\sigma_z - \mathcal{H}_0 + \frac{i}{2\tau}\tau_z\hat{\mathcal{P}}P\right\} + \frac{\pi\nu}{8\tau}\,\mathrm{Str}\int P^2 d^2\mathbf{r}. \tag{2.33}$$

В заключение, выразим среднюю плотность состояний через поле P. Подставляя соотношение $\psi(\mathbf{r})\otimes\bar{\psi}(\mathbf{r}) = \frac{\pi\nu}{2}P(\mathbf{r})$ в уравнение (2.18), представим выражение (2.16), усредненное по беспорядку, в виде

$$\langle\rho(\epsilon)\rangle = \frac{\nu}{4}\,\mathrm{Re}\int\mathrm{Str}\left(k\sigma_z\tau_z\left[\textstyle\int P(\mathbf{r})d^2\mathbf{r}\right]\right)e^{-\mathcal{S}[P]}DP. \tag{2.34}$$

Диагональная седловая точка

Уравнение для седловой точки получается вариацией действия (2.33) по P. Как будет показано ниже, седловое решение P инвариантно относительно проектора $\hat{\mathcal{P}}$, так что при изучении седловой точки он может быть опущен. Тогда получим следующее уравнение:

$$P(\mathbf{r}) = \frac{i}{\pi\nu}\,G(\mathbf{r},\mathbf{r})\tau_z, \tag{2.35}$$

где $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ — функция Грина следующего уравнения:

$$\left\{\epsilon_+\sigma_z - \mathcal{H}_0 + \frac{i}{2\tau}\tau_z P(\mathbf{r})\right\} G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{2.36}$$

При $\epsilon \neq 0$, седловое решение $P(\mathbf{r})$ диагонально в PH и FB пространствах. Однако оно оказывается вырожденным при $\epsilon = 0$; в этом случае седловое многообразие может быть получено из диагонального решения $P(\mathbf{r})$ путем вращения с помощью соответствующей псевдоунитарной матрицы [5]. Здесь мы найдем диагональную седловую точку, а анализ структуры седлового многообразия будет отложен до следующего раздела. Хотя диагональное седловое решение может быть найдено при произвольной энергии, для простоты положим ϵ равным нулю.

Для решения уравнения самосогласования (2.35) найдем функцию Грина при заданном $P(r)$, седловое значение которого не зависит от φ. Диагональный элемент функции Грина вычислен в приложении Г:

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}) = -i\frac{A^2 e^{-2K(r)}}{\omega_0 k_F r}[f_1(r)\sigma_z - i\tau_x f_2(r)], \tag{2.37}$$

где безразмерные функции $f_1(r)$ и $f_2(r)$ имеют вид

$$f_1(r) = \frac{r}{\sqrt{r_0^2+r^2}}, \qquad f_2(r) = \frac{r_0}{r}\left(1 - \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2+r^2}}\right). \tag{2.38}$$

Здесь $r_0 = b/k_F$ — масштаб длины, определяемый $P(r)$ согласно уравнению (Г5). Он связан с числом уровней b, эффективно перемешиваемых беспорядком, которое определяется мнимой частью знаменателя функции Грина в μ-представлении, см. уравнение (Г6). Для самосогласованного нахождения b нужно подставить (2.35) и (2.37) в уравнение (Г5):

$$k_F r_0 = \frac{2A^2}{\omega_0 \tau k_F}\int_0^\infty p_0(r) f_1(r) e^{-2K(r)} dr. \tag{2.39}$$

Нижняя обрезка этого логарифмически расходящегося интеграла определяется множителем $f_1(r)$, тогда как $e^{-2K(r)}$ определяет обрезку сверху:

$$k_F r_0 = g \ln \frac{\xi}{r_0}. \tag{2.40}$$

Здесь величина

$$g = \frac{2A^4}{\pi\nu\tau\omega_0^2 k_F^2} \sim \frac{1}{\omega_0\tau}, \tag{2.41}$$

дает наивную оценку числа уровней, эффективно перемешанных беспорядком. Однако, специфическая структура волновых функций киральной ветви приводит к логарифмическому увеличению этого значения, так что число перемешанных уровней оказывается порядка

$$b = g\mathcal{L}. \tag{2.42}$$

Здесь $\mathcal{L}$ — логарифмически большой множитель:

$$\mathcal{L} = \ln \frac{N}{b} \tag{2.43}$$

Уравнение (2.42) или, что то же, уравнение (2.40) может быть решено методом итераций. После первой итерации получим

$$b \simeq g \ln \frac{N}{g} \simeq \frac{1}{\omega_0 \tau} \ln \Delta\tau, \tag{2.44}$$

что приводит к оценке

$$r_0 \simeq \frac{\xi^2}{l} \ln \Delta\tau, \tag{2.45}$$

где l — длина свободного пробега. В умеренно чистом пределе $r_0 \ll \xi$ определяет новый масштаб длины, связанный с беспорядком.

Полученный результат дает возможность уточнить критерий перехода от сверхчистого к умеренно чистому пределу. Грубая оценка соответствующей переходу величины беспорядка $\tau_c^{-1} \sim \omega_0$, оказывается преувеличенной из-за присутствия логарифмически большого множителя $\mathcal{L}$. Правильная оценка определяется условием $b \sim 1$, что дает $\tau_c^{-1} \sim \omega_0 / \ln N$. Физически это связано с сингулярным ($\propto r^{-1/2}$) поведением огибающей волновых функций киральных состояний (2.13), что приводит к эффективному логарифмическому увеличению силы примесей вблизи центра вихря.

Возвращаясь к уравнению (2.35), напишем диагональное седловое решение $P_0(\mathbf{r})$ в виде

$$P_0(\mathbf{r}) = p_0(r) \left[f_1(r)\sigma_z - i\tau_x f_2(r) \right] \tau_z, \tag{2.46}$$

где

$$p_0(r) = \frac{A^2 e^{-2K(r)}}{\pi\nu\omega_0 k_F r} \sim \frac{\xi}{r} e^{-2K(r)}. \tag{2.47}$$

Второй член в уравнении (2.46) описывает ренормировку сверхпроводящего параметра порядка: $\Delta(r) \mapsto \Delta(r) + \frac{p_0(r) f_2(r)}{2\tau}$. Следовательно, мы можем включить его в $\Delta(r)$ и опустить в дальнейшем. Наконец, легко проверить, что $\hat{\mathcal{P}} P_0 = P_0$, что подтверждает сделанное выше предположение.

4. Нульмерная σ-модель

Зеркальная $\epsilon \leftrightarrow -\epsilon$ антисимметрия (2.6) гамильтониана проявляется в вырожденности седловой точки при $\epsilon = 0$. Такое вырождение возникает уже при исследовании *одночастичной* функции Грина, в противоположность случаю нормального металла, где вырождение возникает при усреднении произведения запаздывающей *и* опережающей функций Грина. Конечное ϵ, входящее в действие (2.33) как коэффициент при нарушающем симметрию члене $\epsilon\sigma_z$, снимает вырождение седлового многообразия. Корреляции на энергиях вблизи ферми-поверхности являются существенно непертурбативными, поскольку они определяются вкладом всего многообразия. На самых низких энергиях $\epsilon < \omega_{Th}$, где $\omega_{Th} = \omega_0\sqrt{g \ln g}$ — эффективная энергия Таулесса (см. раздел 9), нулевая мода дает основной вклад. В этом случае σ-модель сводится к нульмерному пределу, который допускает точное решение.

Особенностью рассматриваемой задачи является эффективное расталкивание уровней вблизи энергии Ферми, вызванное беспорядком, которое приводит к перенормировке среднего расстояния между уровнями $\omega_0 \to \tilde{\omega}_0$ ($\tilde{\omega}_0$ определено в уравнении (2.141)), в полосе энергий $\epsilon \leq \omega_0 g \ln g$. Этот эффект связан с вкладом высших мод в σ-модели. После того, как этот вклад учтен, нульмерная σ-модель может использоваться при энергиях $\epsilon < \omega_{Th}$, при условии, что затравочное расстояние между уровнями ω_0 заменено его ренормированным значением $\tilde{\omega}_0$.

В этом разделе будет найдена параметризация седлового многообразия при $\epsilon = 0$, определена инвариантная мера на нем и выведено эффективное действие при ненулевом значении ϵ.

Седловое многообразие

Мы нашли седловое решение (2.46), диагональное во всех пространствах, кроме пространства Намбу. При $\epsilon = 0$ многообразие седловых точек может быть получено из $P_0(r)$ под действием группы $\mathcal{G}_0 \ni U$:

$$P(r) = U^{-1} P_0(r) U. \tag{2.48}$$

Для $P(r)$, определяемых формулой (2.48), второй член в уравнении (2.33) обращается в нуль. Следовательно, инвариантность уравнения (2.33) относительно (2.48) определяется членом $\mathbf{Str}\ln(\ldots)$. Последний оказывается инвариантным, если U удовлетворяет двум условиям. Первое следует из требования, чтобы $[U, \mathcal{H}_0(\mathbf{r})] = 0$ для всех $\mathbf{r}$. Поскольку гамильтониан (2.8) содержит τ_0, τ_x и τ_z с различными зависимостями от $\mathbf{r}$, U коммутирует с $\mathcal{H}_0(\mathbf{r})$, только если U является единичной матрицей в пространстве Намбу:

$$U \propto \mathbb{1}_N. \tag{2.49}$$

Это позволяет исключить в дальнейшем пространство Намбу и ограничиться рассмотрением 4×4 матриц U, действующих только в пространствах FB и PH. Вторым условием является требование инвариантности $\hat{\mathcal{P}}P(r)$ относительно поворота (2.48). Оно связано со структурой проектора $\hat{\mathcal{P}}$ (2.32) и имеет вид

$$U^{-1} = \bar{U}. \tag{2.50}$$

Следовательно, седловое решение обладает свойством симметрии $\bar{P} = P$, т. е. P имеет ту же симметрию относительно зарядового сопряжения, что и диадное произведение $\psi \otimes \bar{\psi}$.

Отметим, что требование инвариантности действия (2.33) не накладывает никакой связи между U и U^{+}. Формально, седловое многообразие инвариантно относительно сопряжения любой матрицей U, подчиняющейся уравнениям (2.49) и (2.50) вне зависимости от ее свойств по отношению к эрмитовому сопряжению.

Для дальнейшего анализа удобно разделить явную координатную зависимость седлового решения P_0 и его структуру в пространствах FB и PH, написав $P(r) = p_0(r) f_1(r) \tau_z \otimes Q$, где

$$Q = U^{-1} \sigma_z U. \tag{2.51}$$

Уравнения (2.49) и (2.50) определяют псевдоунитарную группу $\mathcal{G}_0 = U(2,2)$. Заметим, что матрицы U и VU, где $[V, \sigma_z] = 0$ приводят к одному и тому же Q. Степени свободы, связанные с такими матрицами V оказываются несущественными, поскольку задача формулируется в терминах матрицы P (или, что то же, Q). Таким образом, для установления однозначного соответствия между U и Q необходимо факторизовать $\mathcal{G}_0$ по всем V, которые коммутируют с σ_z, что определяет факторгруппу $\mathcal{G} = U(2,2)/U(1,1) \otimes U(1,1)$.

Простейшим способом параметризации факторгруппы $\mathcal{G}$ является изучение инфинитезимальных генераторов g группы $\mathcal{G}_0$: $U = \exp(\mathrm{g})$. Согласно (2.50), g подчиняется следующему соотношению:

$$\bar{\mathrm{g}} + \mathrm{g} = 0, \tag{2.52}$$

где (при учете (2.49))

$$\bar{\mathrm{g}} = \sigma_z C_0 \mathrm{g}^T C_0^T \sigma_z. \tag{2.53}$$

Генераторы факторгруппы $\mathcal{G}$ чисто диагональны в пространстве PH:

$$\mathrm{g} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{g}_{ph} \\ \mathrm{g}_{hp} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.54}$$

где g_{ph} и g_{hp} — матрицы 2×2 в пространстве FB.

Подставив (2.54) в (2.52), найдем симметрию блоков g_{ph} и g_{hp}:

$$\mathrm{g}_{ph}^T = \mathrm{g}_{ph} k, \qquad \mathrm{g}_{hp}^T = k \mathrm{g}_{hp}. \tag{2.55}$$

Эти уравнения приводят к следующей параметризации:

$$\mathrm{g}_{ph} = \begin{pmatrix} z_1 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}_{fb}, \qquad \mathrm{g}_{hp} = \begin{pmatrix} z_2 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}_{fb}. \tag{2.56}$$

Здесь z_j — комплексные коммутирующие, а α и β — грассмановы переменные. Особенность данной проблемы заключается в том, что все коммутирующие переменные расположены в фермион-фермионном (FF) секторе, тогда как бозон-бозонный (BB) сектор генератора g оказывается нулевым. Следовательно, BB сектор $U = \exp(\mathrm{g})$, равно как и Q, тоже не содержит коммутирующих переменных, т. е. является четным элементом грассмановой алгебры. Такая ситуация специфична для задачи со сверхпроводимостью и отличается как от техники Ефетова для грязных металлов, так и от расчетов различных корреляторов для кирального гауссового унитарного ансамбля [41], где количество коммутирующих переменных в FF и BB блоках совпадает.

На данном этапе группа $\mathcal{G}$ параметризуется четырьмя действительными и двумя грассмановыми числами. На первый взгляд это противоречит свойству суперсимметрии теории, которое требует равного числа бозонных и фермионных переменных. Стандартный подход, использовавшийся во многих работах (см., например, [5,40,41]), заключается в наложении дополнительного соотношения между U и U^+, которое в нашем случае выглядело бы как $U^+ = SU^T S^T$. Такой выбор основан на требовании, чтобы симметрия P соответствовала симметрии диадного произведения $\psi \otimes \bar{\psi}$, или, другими словами, чтобы супервектор

$U\psi$ имел ту же симметрию, что и ψ. Применение такого подхода приводит к гиперболической симметрии фермион-фермионного сектора, что оказывается несовместимым со сходимостью интегрирования по седловому многообразию. Для преодоления этой проблемы широко используется метод «компактификации». Процедура компактификации состоит в изменении руками соотношения $U^+ = SU^T S^T$ в его фермионной части, чтобы сделать компактным FF сектор. Несмотря на широкое распространение, который получил метод компактификации, он остается достаточно произвольной процедурой. Хотя необходимость компактификации фермион-фермионного сектора может быть обоснована требованиями сходимости, ее действие на грассмановы переменные является неоднозначным: обычно существует несколько способов компактификации, приводящих к различным параметризациям грассмановых переменных. Однако, в некоторых задачах (включая усреднение пары функций Грина) можно избежать необходимости грубой компактификации, используя в исходном лагранжиане разные относительные знаки для фермионов, соответствующих различным функциям Грина (матрица K в работе [5]; см. также [40]). Такой трюк, однако, только скрадывает парадокс, не разрешая его.

Мы предлагаем иной подход, приводящий к параметризации седлового многообразия и не использующий условия $U^+ = SU^T S^T$. Основной идей является условие сходимости интегрирования по седловому многообразию. Сходимость определяется зависящим от ϵ членом, нарушающим PH симметрию, который входит в эффективное действие как $\mathcal{S}_\epsilon = (\pi i/2)(\epsilon_+/\omega_0)\,\mathrm{str}(\sigma_z Q)$ (см. (2.67)). Учитывая инфинитезимальный член в $\epsilon_+ \equiv \epsilon + i\delta$, получим, что интеграл по седловому многообразию с весом $e^{-\mathcal{S}_\epsilon}$ сходится при условии, что Q имеет компактный FF сектор и некомпактный BB сектор.

Таким образом, в линейном пространстве коммутирующих генераторов, действующих в FF (BB) секторе, нужно рассматривать только компактное (некомпактное) подпространство. Другими словами, FF (BB) генераторы должны быть антиэрмитовыми (эрмитовыми). Такой выбор *однозначно* определяется условием сходимости нульмерной σ-модели. Он уменьшает число независимых коммутирующих переменных вдвое, делая его равным числу грассмановых переменных, что восстанавливает суперсимметрию теории. Отметим, что отсечка половины коммутирующих генераторов не влияет на грассмановы переменные.

Итак, соображения сходимости нульмерной σ-модели заставляют нас оставить в FF секторе только антиэрмитовые генераторы. Это достигается наложением связи $z_2 = -z_1^*$. В результате, генераторы (2.56) факторгруппы $\mathcal{G}$ параметризуются двумя грассмановыми числами α и β и одним комплексным числом z:

$$z_1 = iz, \qquad z_2 = iz^*. \tag{2.57}$$

Последний шаг состоит в нахождении Ефетовской параметризации для $U = \exp(\mathrm{g})$. Суперматрица U параметризуется двумя грассмановыми (η и ζ) и двумя действительными переменными θ и φ:

$$U = U_\eta U_\varphi U_0 U_\varphi^{-1} U_\eta^{-1}, \tag{2.58}$$

где

$$U_0 = \begin{pmatrix} \cos\vartheta/2 & -i\sin\vartheta/2 \\ -i\sin\vartheta/2 & \cos\vartheta/2 \end{pmatrix}_{ph}, \qquad \vartheta = \begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{fb}; \tag{2.59}$$

$$U_\varphi = \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & w^{-1} \end{pmatrix}_{ph}, \qquad w = \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{fb}; \tag{2.60}$$

$$U_\eta = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}_{ph}, \qquad u = \exp\begin{pmatrix} 0 & \zeta \\ \eta & 0 \end{pmatrix}_{fb}, \qquad v = u^T = \exp\begin{pmatrix} 0 & -\eta \\ \zeta & 0 \end{pmatrix}_{fb}. \tag{2.61}$$

Отметим, что U_η и U_φ коммутируют с σ_z.

Теперь можно записать искомую параметризацию седлового многообразия:

$$Q = U_\eta Q_0 U_\eta^{-1}, \tag{2.62}$$

где все коммутирующие переменные содержатся в суперматрице Q_0:

$$Q_0 = U_\varphi U_0^{-1} \sigma_z U_0 U_\varphi^{-1}. \tag{2.63}$$

Подставив U_0 и U_φ, получим

$$Q_0 = \begin{pmatrix} \cos\theta & & -ie^{i\varphi}\sin\theta & \\ & 1 & & 0 \\ ie^{-i\varphi}\sin\theta & & -\cos\theta & \\ & 0 & & -1 \end{pmatrix}_{ph} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -ie^{i\varphi}\sin\theta & & \\ ie^{-i\varphi}\sin\theta & -\cos\theta & & \\ & & 1 & 0 \\ & & 0 & -1 \end{pmatrix}_{fb}. \tag{2.64}$$

Как обсуждалось выше, BB сектор оказывается тривиальным. В этой параметризации углы θ и φ изменяются в пределах $\theta \in [0, \pi]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Эффективное действие

Ненулевое значение ϵ снимает вырождение седлового многообразия. В первом порядке по ϵ действие (2.33) имеет вид:

$$\mathcal{S}_\epsilon[Q] = -\frac{\epsilon_+}{2}\,\mathrm{Str}\int G_0(\mathbf{r},\mathbf{r})U^{-1}\sigma_z U d^2\mathbf{r}. \tag{2.65}$$

Вычислив след в пространстве Намбу и проинтегрировав, найдем

$$\mathrm{tr}\int G_0(\mathbf{r},\mathbf{r})d^2\mathbf{r} = -\frac{\pi i}{\tilde{\omega}_0}\sigma_z. \tag{2.66}$$

Подставив это уравнение в (2.65) и совершив циклическую перестановку под знаком суперследа, получим следующее, общее для σ-моделей выражение:

$$\mathcal{S}_\epsilon[Q] = \frac{\pi i}{2}\frac{\epsilon_+}{\tilde{\omega}_0}\,\mathrm{str}(\sigma_z Q). \tag{2.67}$$

В нашем случае матрица σ_z аналогична матрице Λ, которая нарушает симметрию между запаздывающим (R) и опережающим (A) блоками в методе Ефетова [5]. Это обстоятельство подчеркивает упоминавшуюся выше формальную аналогию между нашим PH пространством и RA пространством у Ефетова.

Используя параметризацию (2.64), находим эффективное действие нульмерной σ-модели:

$$\mathcal{S}_\epsilon[Q] = -\pi i\frac{\epsilon}{\tilde{\omega}_0}(1-\cos\theta). \tag{2.68}$$

Отметим, что действие (2.68), и вычисленные ниже березиниан (2.73) и предэкспонента (2.75), определяются только одним фермионным углом θ.

Инвариантная мера

Найдем инвариантную меру DQ интегрирования по седловому многообразию. Для этого рассмотрим элемент длины в суперпространстве (ср. [5]):

$$dl^2 = \mathrm{str}\,dQ^2. \tag{2.69}$$

Он может быть записан как [5]

$$dl^2 = \mathrm{str}\{dQ_0^2 + [\delta U, Q_0]^2 + 2\delta U[Q_0, dQ_0]\}, \tag{2.70}$$

где

$$\delta U = U_\eta^{-1} dU_\eta. \tag{2.71}$$

После простых, но достаточно громозких преобразований, представленных в приложении Д, получим

$$dl^2 = 2[d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2] + 8(1-\cos\theta)d\eta d\zeta. \tag{2.72}$$

Выражая отсюда березиниан, находим окончательно

$$DQ = \frac{\sin\theta}{4\pi(1-\cos\theta)} d\theta d\varphi d\eta d\zeta. \tag{2.73}$$

5. Результат для $\langle \rho(E) \rangle$

Переписав (2.34) через матрицу Q, получим

$$\langle \rho(\epsilon) \rangle = \frac{1}{4\tilde{\omega}_0} \operatorname{Re} \int \operatorname{str}(k\sigma_z Q) e^{-\mathcal{S}_\epsilon[Q]} DQ. \tag{2.74}$$

Используя параметризацию (2.62), получим выражение для предэкспоненты:

$$\operatorname{str}(k\sigma_z Q) = 2(1+\cos\theta) + 4\eta\zeta(1-\cos\theta). \tag{2.75}$$

Теперь мы в состоянии проинтегрировать по седловому многообразию. Подставляя уравнения (2.75), (2.68) и (2.73) в (2.74), получим

$$\begin{aligned} \langle \rho(\epsilon) \rangle = \frac{1}{2\tilde{\omega}_0} \operatorname{Re} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int d\eta d\zeta \frac{\sin\theta}{4\pi(1-\cos\theta)} \times \\ \times [(1+\cos\theta) + 2\eta\zeta(1-\cos\theta)] e^{\pi i \frac{\epsilon}{\tilde{\omega}_0}(1-\cos\theta)}. \end{aligned} \tag{2.76}$$

Интеграл от первого члена в квадратных скобках по грассмановым переменных равен нулю, в то время как интеграл от него по θ расходится. Эта ситуация обычна для нульмерной σ-модели (см. [5,42]). Существует два способа раскрытия неопределенности $0 \times \infty$. Первый — взять производную по ϵ, что устраняет сингулярность при $\theta = 0$, и интеграл становится равным нулю. Следовательно, первый член в квадратных скобках дает не зависящий от энергии вклад в плотность состояний, который может быть отождествлен с $\rho(\infty) = 1/\tilde{\omega}_0$. Другой способ — это заметить, что интеграл не изменится, если вместо $(1+\cos\theta)$ написать 2. Далее, воспользовавшись тождеством $\int e^{-\mathcal{S}[Q]} DQ = 1$, выражающим суперсимметрию теории, можно явно показать, что вклад равен $1/\tilde{\omega}_0$. Что касается второго члена в квадратных скобках, то проинтегрировав по грассмановым переменным и по циклическому углу φ, получим:

$$\langle\rho(\epsilon)\rangle = \frac{1}{\tilde{\omega}_0} - \frac{1}{2\tilde{\omega}_0}\,\mathrm{Re}\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta e^{\pi i \frac{\epsilon}{\tilde{\omega}_0}(1-\cos\theta)} = \frac{1}{\tilde{\omega}_0} - \frac{1}{2\tilde{\omega}_0}\,\mathrm{Re}\int_{-1}^{1} dx e^{\pi i \frac{\epsilon}{\tilde{\omega}_0}(1-x)}. \quad (2.77)$$

В результате получим ответ:

$$\langle\rho(\epsilon)\rangle = \frac{1}{\tilde{\omega}_0}\left(1 - \frac{\sin(2\pi\epsilon/\tilde{\omega}_0)}{2\pi\epsilon/\tilde{\omega}_0}\right), \qquad (2.78)$$

функциональная форма которого совпадает с результатом для класса C по классификации Алтланда и Цирнбауера.

Отметим, что этот результат может быть получен с использованием пертурбативного разложения [43] вблизи седловых точек $Q = \sigma_z$ и $Q = (-k)\sigma_z$ нульмерной σ-модели. Как и в унитарном случае, метод [43] дает правильный результат и при $\epsilon \sim \omega_0$.

6. Матричная модель

μ-представление

В предыдущих главах была выведена нульмерная σ-модель, которая включает интегрирование по координатно-независящим суперматрицам Q (2.62) и дает возможность найти среднюю плотность состояний на малых энергиях. На энергиях, больших энергии Таулесса ω_{Th}, становятся существенными высшие, зависящие от $\mathbf{r}$ моды $Q(\mathbf{r})$. В принципе, они могут быть проанализированы в рамках суперсимметричной теории поля в координатном пространстве. Однако, как обсуждалось выше, в этом случае возникает следующая техническая проблема. Суперматрица $Q(\mathbf{r})$ зависит от двух пространственных координат, скажем, r и φ, тогда как низколежащие состояния киральной ветви являются эффективно одномерными. Таким образом, одна степень свободы в координатном пространстве является «лишней». На первый взгляд, такой «лишней» координатой является просто расстояние от начала координат, r, тогда как полярный угол φ канонически сопряжен к μ. Однако, поскольку в данном случае радиальная часть чистых волновых функций (2.13) явно зависит от μ, то она не может быть просто исключена. Таким образом, желательно найти другой подход, с самого начала учитывающий «одномерность» киральной ветви.

Изучая свойства системы при энергиях $\epsilon \ll \Delta$ и при условии, что размытие уровней беспорядком ($\omega_0 b$) тоже гораздо меньше щели в объеме, мы можем ограничиться рассмотрением только локализованной ветви и пренебречь непрерывным спектром и другими локализованными ветвями с энергиями, близкими к Δ. Тогда гамильтониан становится матрицей $N \times N$ в базисе чистых состояний $|\mu\rangle$. Координатная зависимость этих состояний $\langle \mathbf{r}|\mu\rangle$ дается волновыми функциями (2.13).

Матричная запаздывающая функция Грина, определенная в (2.15), может быть представлена через функциональный интеграл по N-компонентным векторам $\Phi = (\cdots, \Phi_{-1/2}, \Phi_{1/2}, \cdots)^T$ как

$$\mathcal{G}^R(\varepsilon) = \frac{-i}{\omega_0} Z_R^{-1} \int \Phi\Phi^+ \exp\left\{ i\Phi^+[\varepsilon_+ - H_0 - V]\Phi \right\} D\Phi^* D\Phi. \tag{2.79}$$

Здесь и в дальнейшем ε обозначает безразмерную энергию $\epsilon = \omega_0 \varepsilon$, H_0 и V — обезразмеренные матрицы операторов $\mathcal{H}_0(\mathbf{r})$ и $\tau_z U(\mathbf{r})$ (см. уравнение (2.8)) в базисе чистых состояний (2.13):

$$\langle \mu | H_0 | \mu' \rangle = \mu \delta_{\mu,\mu'}, \tag{2.80}$$

$$\langle \mu | V | \mu' \rangle = \frac{1}{\omega_0} \int d^2\mathbf{r} \Psi_\mu^+(\mathbf{r}) \tau_z U(\mathbf{r}) \Psi_{\mu'}(\mathbf{r}) = \frac{A^2}{\omega_0} \int d^2\mathbf{r}\, w_{\mu\mu'}(r,\varphi) U(\mathbf{r}) e^{-2K(r)}, \tag{2.81}$$

где

$$w_{\mu\mu'}(\mathbf{r}) = e^{i(\mu'-\mu)\varphi} \left[J_{\mu-1/2}(k_F r) J_{\mu'-1/2}(k_F r) - J_{\mu+1/2}(k_F r) J_{\mu'+1/2}(k_F r) \right]. \tag{2.82}$$

Статистическая сумма в (2.79) дается выражением

$$Z_R = \int \exp\left\{ i\Phi^+[\varepsilon_+ - H_0 - V]\Phi \right\} D\Phi^* D\Phi. \tag{2.83}$$

Функциональное представление (2.79) служит отправной точкой для теории возмущений, представленной в разделе 7.

Найдем, как записывается CT-антисимметрия (2.6) в терминах матричного гамильтониана $H_0 + V$. Для этого заметим, что волновые функции $\Psi_\mu(\mathbf{r})$ подчиняются уравнению $\Psi_{-\mu}(\mathbf{r}) = (-1)^{\mu+1/2} i\tau_y \Psi_\mu^*(\mathbf{r})$ [ср. (2.5)]. Такая симметрия приводит к следующей симметрии матричных элементов:

$$\langle -\mu | V | -\mu' \rangle = (-1)^{\mu+\mu'} \langle \mu | V | \mu' \rangle^* \tag{2.84}$$

и, очевидно,

$$\langle -\mu | H_0 | -\mu \rangle = -\langle \mu | H_0 | \mu \rangle. \tag{2.85}$$

Таким образом, симметрия (2.6) гамильтониана может быть выражена с помощью недиагональной матрицы γ:

$$\langle \mu | \gamma | \mu' \rangle = (-1)^{\mu+1/2} \delta_{\mu+\mu'} \tag{2.86}$$

в виде

$$H = -\gamma H^T \gamma^T. \tag{2.87}$$

Симметрийные свойства матрицы γ следуют из ее определения:

$$\gamma^{-1} = -\gamma = \gamma^T. \tag{2.88}$$

Дуальное x-представление

Совершим преобразование Фурье относительно импульса μ. Поскольку μ может принимать N различных значений, преобразование Фурье определено на решетке $\{x_k = \frac{2\pi}{N} k\}$, $k = 0, \ldots, N-1$ на единичной окружности. Однако, при изучении низкоэнергетических свойств ($\varepsilon \ll N$) можно формально устремить $N \to \infty$ и написать преобразование Фурье от дискретной переменной μ к непрерывной переменной $x \in [0, 2\pi)$:

$$\Phi(x) = \sum_{\mu} \Phi_{\mu} e^{-i(\mu - \frac{1}{2})x}, \qquad \Phi_{\mu} = \int \frac{dx}{2\pi} \Phi(x) e^{i(\mu-\frac{1}{2})x}, \tag{2.89}$$

так что $\Phi(x)$ становится скалярным полем на единичной окружности. Здесь и в последующем под интегрированием по x понимается интегрирование по периоду 2π, а точки x и $x + 2\pi$ считаются эквивалентными.

Согласно определению (2.89), переменная x канонически сопряжена угловому моменту μ. Отметим, что она отличается от полярного угла φ в координатном пространстве в силу причин, обсуждавшихся в начале раздела.

Статсумма (2.83) переписывается через $\Phi(x)$ следующим образом:

$$Z^R = \int \exp i \Bigg\{ \int \frac{dx}{2\pi} \Phi^*(x) \left(\epsilon_+ - i \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2} \right) \Phi(x) - \\ - \iint \frac{dx dx'}{(2\pi)^2} \Phi^*(x) V(x, x') \Phi(x') \Bigg\} D\Phi^*(x) D\Phi(x), \tag{2.90}$$

где матрица случайного потенциала в x-представлении имеет вид:

$$V(x,x') = \sum_{\mu\mu'} e^{-i(\mu-\frac{1}{2})x} \langle\mu|V|\mu'\rangle\, e^{i(\mu'-\frac{1}{2})x'}. \tag{2.91}$$

Используя уравнение (2.81), ее можно представить в виде следующего интеграла по пространству:

$$V(x,x') = \frac{A^2}{\omega_0}\int d^2\mathbf{r} w_{xx'}(r,\varphi)U(\mathbf{r})e^{-2K(r)}, \tag{2.92}$$

где

$$\begin{aligned} w_{xx'}(r,\varphi) &= \sum_{k,\nu} e^{-ikx} e^{i(k+\nu)x'} e^{i\nu\varphi} \left[J_k(k_F r)J_{k+\nu}(k_F r) - J_{k+1}(k_F r)J_{k+\nu+1}(k_F r)\right] \\ &= (1-e^{i(x-x')}) \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\nu(\varphi+x')} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik(x'-x)}\, J_k(k_F r)J_{k+\nu}(k_F r). \end{aligned} \tag{2.93}$$

Основное преимущество дуального x-представления заключается в том, что оба суммирования по функциям Бесселя в (2.93) могут быть проделаны аналитически, и полученное выражение (2.97) оказывается очень удобным для усреднения по беспорядку. Первое суммирование по k вычисляется с помощью формулы суммирования [44] для функций Бесселя:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ik(x'-x)}\, J_k(k_F r)J_{k+\nu}(k_F r) = e^{i\nu\frac{\pi+x-x'}{2}}\, J_\nu\left(2k_F r\sin\frac{x'-x}{2}\right). \tag{2.94}$$

В итоге получим

$$w_{xx'}(r,\varphi) = (1-e^{i(x-x')}) \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\left(\varphi+\frac{\pi+x+x'}{2}\right)\nu}\, J_\nu\left(2k_F r\sin\frac{x'-x}{2}\right). \tag{2.95}$$

Второе суммирование по ν дает производящую функцию для функции Бесселя:

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} e^{i\left(\varphi+\frac{\pi+x+x'}{2}\right)\nu}\, J_\nu\left(2k_F r\sin\frac{x'-x}{2}\right) = \\ &= \exp\left\{k_F r\sin\frac{x'-x}{2}\left[e^{i\left(\varphi+\frac{\pi+x+x'}{2}\right)} - e^{-i\left(\varphi+\frac{\pi+x+x'}{2}\right)}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{2.96}$$

После простых преобразований получим окончательно

$$w_{xx'}(r,\varphi) = (1-e^{i(x-x')})\, \exp\Big\{-ik_F r[(\sin x-\sin x')\cos\varphi + (\cos x-\cos x')\sin\varphi]\Big\}. \tag{2.97}$$

Все особенности теории содержатся в парном корреляторе потенциала $V(x,x')$:

$$\mathcal{W}(x_1,x_2,x_3,x_4)=\langle V(x_1,x_2)V(x_3,x_4)\rangle, \tag{2.98}$$

где усреднение совершается по гауссовому распределению потенциала примесей $U(\mathbf{r})$ с коррелятором (2.17). Высшие корреляторы $V(x,x')$ выражаются через $\mathcal{W}(x_1,x_2,x_3,x_4)$, в силу гауссовости статистики $U(\mathbf{r})$.

Используя представление (2.92) и усредняя, имеем

$$\mathcal{W}(x_1,x_2,x_3,x_4)=\frac{A^4}{2\pi\nu\tau\omega_0^2}\int d^2\mathbf{r}w_{x_1x_2}(r,\varphi)w_{x_3x_4}(r,\varphi)e^{-4K(r)}. \tag{2.99}$$

Подставляя $w_{xx'}(r,\varphi)$ из (2.97) и интегрируя по полярному углу φ, получим

$$\mathcal{W}(x_1,x_2,x_3,x_4)=\frac{A^4}{\nu\tau\omega_0^2}(1-e^{i(x_1-x_2)})(1-e^{i(x_3-x_4)})\int_0^\infty rdre^{-4K(r)}J_0(k_Fr\sqrt{Y}), \tag{2.100}$$

где

$$Y(x_1,x_2,x_3,x_4)=\left|e^{ix_1}-e^{ix_2}+e^{ix_3}-e^{ix_4}\right|^2. \tag{2.101}$$

Стоит отметить, что выражение (2.100) все еще является точным. При работе с функциями Бесселя в процессе его вывода не делалось никаких предположений. Таким образом, x-представление дает возможность получить точное (выходящее за рамками квазиклассического приближения) выражение для коррелятора (2.98).

Исследуем зависимость $\mathcal{W}$ от аргументов. Подынтегральное выражение в уравнении (2.100) — это произведение медленно меняющейся функции $e^{-4K(r)}$, и функции Бесселя нулевого порядка. При типичных значениях $Y\sim 1$ интеграл оказывается экспоненциально малым вследствие осциллирующего поведения функции Бесселя. Он не подавляется только в случае, если функция Бесселя не осциллирует на масштабе $r\sim\xi$, т. е. при очень малых Y: $\sqrt{Y}\le 1/k_F\xi\sim 1/N\ll 1$.

Решим уравнение $Y(x_1,x_2,x_3,x_4)=0$. Четыре числа x_1,x_2,x_3,x_4 формально могут рассматриваться как координаты внутри четырехмерного куба со стороной 2π (который, в действительности, является тором в силу отождествления

$x \equiv x + 2\pi$). Легко показать, что уравнение $Y(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ определяет три различных плоскости внутри этого гиперкуба:

$$\text{Плоскость I:} \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_1, x_3, x_3); \tag{2.102}$$

$$\text{Плоскость II:} \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_2, x_1); \tag{2.103}$$

$$\text{Плоскость III:} \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_1 + \pi, x_2 + \pi). \tag{2.104}$$

Любое смещение по нормали от этих плоскостей увеличивает Y, и, когда Y становится больше $1/N^2 \ll 1$, коррелятор $\mathcal{W}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ экспоненциально убывает. Таким образом, $\mathcal{W}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ оказывается отличным от нуля только в тонких слоях около плоскостей I, II и III. Эффективная толщина $\delta x_\perp$ этих слоев стремится к нулю при N, стремящемся к бесконечности.

После усреднения по беспорядку (см. уравнение (2.159)) парный коррелятор входит в теорию в виде интеграла с четырьмя полями $\Phi(x)$: $\mathcal{S}_{int} \propto \int \mathcal{W}(x_1, x_2, x_3, x_4)\Phi^*(x_1)\Phi(x_2)\Phi^*(x_3)\Phi(x_4)dx_1dx_2dx_3dx_4$. Его поведение зависит от отношения между характерной длиной $\delta x_\perp$ затухания коррелятора в нормальном направлении и характерным масштабом изменения поля $\Phi(x)$. Последний определяется обратной скоростью затухания b^{-1} функции Грина (ср. (2.179)), где $b = g\mathcal{L}$ — число уровней, перемешанных беспорядком (ср. (2.42)). Величина b^{-1} определяет жесткость флуктуаций $\Phi(x)$: они «замерзают» на масштабах, меньших b^{-1}.

Размер $\delta x_\perp$ не зависит от беспорядка, в то время как b^{-1} уменьшается с уменьшением беспорядка. Следовательно, в пределе относительно слабого беспорядка, когда $\delta x_\perp \ll b^{-1}$, поле $\Phi(x)$ остается практически постоянным на масштабе $\delta x_\perp$. В этом случае можно считать, что переменные $\Phi(x_i)$ в $\mathcal{S}_{int}$ лежат в плоскостях (2.102)–(2.104), и проинтегрировать *только* парный коррелятор $\mathcal{W}$ по направлениям, нормальным к этим плоскостям. Таким образом, в пределе $\delta x_\perp \ll b^{-1}$, парный коррелятор случайного потенциала эффективно сводится к сумме вкладов от трех плоскостей, каждый из которых содержит две δ-функции, которые заставляют точку (x_1, x_2, x_3, x_4) принадлежать соответствующей плоскости.

Рассмотрим вначале плоскость I. Хотя интеграл в уравнении (2.100) не равен нулю, все выражение обращается в нуль из-за множителя перед интегралом. Для получения ненулевого результата нужно учитывать смещение по нормали, что привносит дополнительный малый сомножитель порядка $\delta x_\perp \ll 1$. Таким образом, можно пренебречь вкладом от плоскости I и рассматривать только плоскости II и III. Интегрирование по нормальным смещениям относительно этих плоскостей проделано в приложении Е. В результате, выражение для парного коррелятора принимает вид

$$\mathcal{W}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{g}{\pi} T(x_1 - x_2 + \pi)(2\pi)^2 \times$$
$$\times \left[\delta(x_1 - x_4)\delta(x_2 - x_3) - e^{i(x_1 - x_2)}\delta(x_1 - x_3 + \pi)\delta(x_2 - x_4 + \pi)\right]. \tag{2.105}$$

Здесь $g \sim (\omega_0 \tau)^{-1}$ — константа связи (2.41), а ядро T дается выражением

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\left|\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\right|, & \text{при } |x| > \frac{1}{\sqrt{N}}; \\ \sim \sqrt{N}, & \text{при } |x| < \frac{1}{\sqrt{N}}. \end{cases} \tag{2.106}$$

$T(x)$ максимально при $x \to 0$, где оно имеет сингулярность $|x|^{-1}$. Эта сингулярность приводит к логарифмической зависимости Фурье-гармоник ядра $\mathcal{T}(m)$, см. Приложение Ж.

В заключение, обсудим область применимости результата (2.105). Как объяснено выше, этот коррелятор сводится к сумме членов, каждый из которых содержит две δ-функции, при условии, что характерный масштаб b^{-1} изменений поля $\Phi(x)$ больше длины затухания $\delta x_\perp$ парного коррелятора в нормальном направлении. В действительности, как следует из уравнения (Е15), $\delta x_\perp$ зависит от положения точки на плоскостях II или III. Следовательно, правильный критерий применимости результата (2.105), должен иметь вид

$$\max \delta x_\perp \ll b^{-1}. \tag{2.107}$$

Взяв супремум уравнения (Е15), получим критерий возможности свести $\mathcal{W}$ к сумме (2.105) проекторов на плоскости II и III:

$$b \ll \sqrt{N}. \tag{2.108}$$

Ниже будет предполагаться, что это условие выполняется всегда. В этом случае полное число состояний киральной ветви N входит в теорию только через обрезку сингулярного ядра (2.106) при $x = 0$.

7. Анализ диаграммной теории возмущений

Диаграммная техника в μ-представлении

В данном разделе будет развита диаграммная теория возмущений для усредненной по беспорядку функции Грина (2.79). Хотя диаграммный анализ и не дает возможности получить непертурбативный результат при малых ε, он удобен для определения квазиклассического параметра, необходимого для вывода σ-модели. Существование такого параметра в нашей одномерной модели является нетривиальным фактом, т. к. известно, что он отсутствует в одномерном одноканальном грязном проводе [45]. Мы покажем, что в нашей проблеме малый квазиклассический параметр существует и равен $\mathcal{L}^{-1}$, где $\mathcal{L} = \ln \Delta\tau$ — логарифмически большой множитель, определенный в уравнении (2.43). Затем будет вычислена куперонная лестница, ренормирущая среднюю плотность состояний, и найдена соответствующая поправка.

Диаграммное разложение наиболее естественно выглядит в исходном μ-представлении. Отметим, что x- и μ-представления аналогичны $\mathbf{r}$- и $\mathbf{p}$-представлениям стандартной диаграммной техники для грязных металлов. Преобразуя парный коррелятор (2.105), полученный в x-пространстве, в импульсное пространство с помощью уравнения (2.91), получим для $\mathcal{W}_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \langle V_{\mu_1\mu_2} V_{\mu_3\mu_4} \rangle$ (напомним, что μ_i — полуцелое):

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \frac{g}{\pi} \iint \frac{dx_1 dx_2}{(2\pi)^2} T(x_1 - x_2 + \pi) \times \\ \times \left\{ e^{i(\mu_1-\mu_4)x_1 - i(\mu_2-\mu_3)x_2} - (-1)^{\mu_3-\mu_4} e^{i(\mu_1+\mu_3)x_1 - i(\mu_2+\mu_4)x_2} \right\}. \end{aligned} \tag{2.109}$$

Интегрирование по разности $x_1 - x_2$ дает преобразование Фурье от ядра T (см. приложение Ж), тогда как второе интегрирование дает закон сохранения импульса:

$$\mathcal{W}_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \frac{g}{\pi} \delta_{\mu_1-\mu_2+\mu_3-\mu_4} \left[(-1)^{\mu_1-\mu_4} \mathcal{T}(\mu_1 - \mu_4) - (-1)^{\mu_1+\mu_4} \mathcal{T}(\mu_1 + \mu_3) \right]. \tag{2.110}$$

Условие сохранения импульса может быть удовлетворено, например, с помощью следующей параметризации входящих и выходящих импульсов:

$$\mu_1 = \mu, \quad \mu_2 = \mu + m, \quad \mu_3 = \mu', \quad \mu_4 = \mu' - m, \tag{2.111}$$

где μ и μ' — полуцелые числа, m — целое. Тогда уравнение (2.110) сводится к

$$\mathcal{W}_{\mu,\mu+m,\mu',\mu'-m} = \frac{g}{\pi} (-1)^{\mu-\mu'+m} \left[\mathcal{T}(\mu - \mu' + m) + \mathcal{T}(\mu + \mu') \right]. \tag{2.112}$$

Для больших $m \gg 1$,

$$\mathcal{T}(m) \simeq \ln \frac{\sqrt{N}}{|m|}, \tag{2.113}$$

$\mathcal{T}(0) = \ln\sqrt{N}$. Для промежуточных $m \sim 1$, значение $\mathcal{T}_m$ найдено в Приложении Ж.

Сформулируем правила диаграммной техники. Основными элементами являются затравочная функция Грина

$$G_0(\mu) = \frac{1}{\varepsilon_+ - \mu} \tag{2.114}$$

и примесная вершина (2.112). Их графическое представление приведено на рис. 1. Диаграммное разложение строится на основе функционального представления (2.79). Так же, как для обычной крестовой техники, разрешены только диаграммы без замкнутых петель.

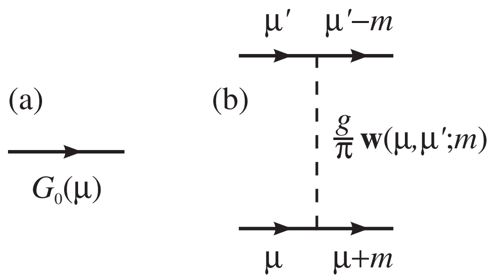

Рис. 1. Графическое представление основных элементов диаграммной техники в μ-представлении: (a) затравочная функция Грина; (b) вершина взаимодействия.

Самосогласованное борновское приближение

Теория среднего поля, представленная в разделах 3 и 8, соответствует суммированию диаграмм без пересечений примесных линий. На языке теории возмущений это эквивалентно так называемому самосогласованному борновскому приближению (Self-consistent Born approximation, SCBA) в котором учитывается только собственная энергетическая часть, показанная на рис. 2.

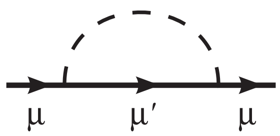

Рис. 2. Собственно-энергетическая часть $\Sigma_0(\mu)$ в самосогласованном борновском приближении.

Жирная линия на рис. 2 обозначает точную SCBA функцию Грина,

$$G(\mu) = \frac{1}{\varepsilon_+ - \mu - \Sigma_0(\mu)}, \tag{2.115}$$

а аналитическое выражение для $\Sigma_0(\mu)$ имеет вид

$$\Sigma_0(\mu) = \frac{g}{\pi}\sum_{\mu'}[\mathcal{T}(0) + \mathcal{T}(\mu+\mu')]G(\mu'). \tag{2.116}$$

Отметим, что уравнение (2.116) не содержит осциллирующего множителя $(-1)^m$.

Как будет показано ниже, зависимость собственно-энергетической части от μ оказывается слабой, так что целесообразно представить ее в виде

$$\Sigma_0(\mu) = -i(b + s(\mu)), \tag{2.117}$$

где $s(\mu) \ll b$, и $s(0) = 0$. Затем, подставив (2.115) в (2.116) и перейдя от суммирования по дискретным импульсам к интегрированию по непрерывным μ', что справедливо в умеренно чистом пределе $b \gg 1$ (см. обсуждение в разделе 3), получим уравнение самосогласования

$$\Sigma_0(\mu) = \frac{g}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\mu' \frac{\ln\frac{N}{|\mu+\mu'|}}{\varepsilon - \mu' + ib + is(\mu')}. \tag{2.118}$$

Здесь использована асимптотика $\mathcal{T}(m)$ при больших m, поскольку интеграл набирается с больших $\mu' \sim b \gg 1$.

Это уравнение может быть решено для произвольных ε. Но, поскольку нас интересуют свойства спектра при $\varepsilon \ll b$, положим энергию ε равной нулю. Ненулевое значение ε может быть восстановлено с помощью сдвига $ib \to \varepsilon + ib$.

Решим уравнение (2.118) методом итераций. Сначала пренебрежем $s(\mu')$ в знаменателе и получим

$$b + s(\mu) = g\ln N - \frac{ig}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln|u|\,du}{-u+\mu+ib} = g\ln\frac{N}{b - i\mu}. \tag{2.119}$$

Таким образом, после первой итерации мы приходим к

$$b = g\ln\frac{N}{b} \equiv g\mathcal{L}, \tag{2.120}$$

$$s(\mu) = -g\ln\frac{b - i\mu}{b}. \tag{2.121}$$

Уравнение (2.120) самосогласованно определяет число уровней b, эффективно перемешанных беспорядком. Оно в точности совпадает с уравнением (2.42), полученным в разделе 3. Полезно проследить происхождение множителя $\mathcal{L} = \ln\frac{N}{b}$ из вершинной функции $\mathcal{T}(m)$. Согласно уравнению (2.116), он возникает следующим нетривиальным образом:

$$\ln\frac{N}{b}=\mathcal{T}(0)+\mathcal{T}(b)=\ln\sqrt{N}+\ln\frac{\sqrt{N}}{b}, \tag{2.122}$$

где первый и второй члены соответствуют вкладам в коррелятор (2.105) от плоскостей II и III.

Следующим шагом нужно найти поправку к $\Sigma_0(\mu)$, учитывая малый член $s(\mu')$ в (2.118):

$$i\delta\Sigma_0(\mu)=-\frac{g^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\mu'\frac{\ln N/|\mu+\mu'|}{(-\mu'+ib)^2}\ln\frac{b-i\mu'}{b}. \tag{2.123}$$

В главном порядке по $\mathcal{L}^{-1}$

$$i\delta\Sigma_0(\mu)=-\frac{g^2\mathcal{L}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\mu'}{(-\mu'+ib)^2}\ln\frac{b-i\mu'}{b}=-\frac{g}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x-i)^2}\ln(1-ix)=-g. \tag{2.124}$$

Итак, мы видим, что в результате второй итерации возникает слабая перенормировка $N\to N/e$. Поправки к $s(\mu)$ оказывается малой как $g/\mathcal{L}$, и ей можно пренебречь. Таким образом, в последующем мы будем использовать $\Sigma_0(\mu)$ с параметрами b и $s(\mu)$ приведенными в уравнениях (2.120), (2.121).

Высшие порядки и классификация диаграмм

Самосогласованное борновское приближение эквивалентно седловому решению в теории поля. Для того, чтобы ответить на вопрос о критерии применимости SCBA, нужно изучить диаграммы с пересечениями примесных линий. При этом основным элементом диаграммной техники становится SCBA функция Грина (2.115), и, соответственно, исключаются все собственно-энергетические части типа изображенной на рис. 2.

Для начала приведем грубую оценку величины n-петлевой диаграммы для собственно-энергетической части. Она содержит n примесных линий, $2n-1$ внутренних функций Грина (2.115) и n независимых переменных интегрирования. Размерная оценка диаграммы дает

$$(g\mathcal{T})^n\times\frac{1}{b^{2n-1}}\times b^n\sim g\log\sim b, \tag{2.125}$$

что совпадает со величиной SCBA диаграммы. Однако, как будет показано ниже, непосредственная оценка (2.125) является завышенной, и в действительности любая высшая диаграмма по крайней мере в $\mathcal{L}$ раз меньше. Появление малого параметра $\mathcal{L}^{-1}$ является следствием киральности и квазилокальности теории.

Исследуем n-петлевую диаграмму более детально. n независимых переменных интегрирования могут быть выбраны произвольно при условии выполнения закона сохранения импульса. Однако, среди различных параметризаций внутренних импульсов существует одна, которая существенно упрощает весь анализ. Такая параметризация, в дальнейшем называемая канонической, строится следующим образом (для иллюстрации см. рис. 3). Нарисуем диаграмму так, чтобы все функции Грина лежали на одной прямой, стрелками направо. Припишем каждой из примесных линий целые числа m_i, имеющие смысл импульса, проходящего по примесной линии справа налево. Тогда легко убедиться, что выбор импульсов μ_a внутренних функций Грина согласно

$$\mu_a = \mu + \sum_{i \in \mathcal{E}(\mu_a)} m_i \tag{2.126}$$

удовлетворяет закону сохранения. В уравнении (2.126) μ — внешний импульс диаграммы, $\mathcal{E}(\mu_a)$ — множество примесных линий, которые охватывают функцию Грина $G(\mu_a)$.

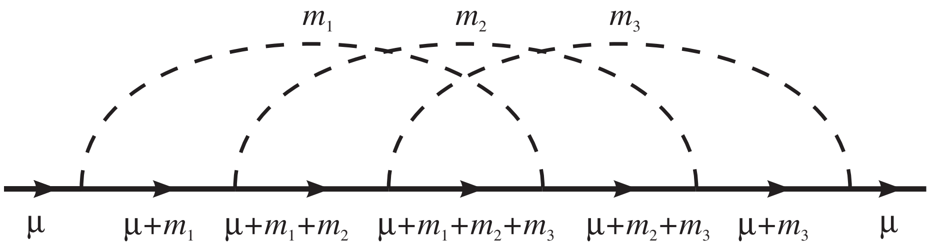

Рис. 3. Построение канонической параметризации импульсов на примере веерной диаграммы третьего порядка.

Теперь, когда выбрана параметризация (2.126), обратим внимание на вершинные функции (2.112). Они содержат медленную зависимость от импульса $\mathcal{T}(p)$ и быстрый осциллирующий множитель $(-1)^{\mu-\mu'+m}$. Последний может только значительно уменьшить вклад диаграмм и будет проанализирован ниже. Что касается логарифмической функции $\mathcal{T}(p)$, она остается практически постоянной на масштабе b, на который садится интегрирование по внутренним импульсам. Это отражает свойство *квазилокальности* теории. Действительно, в пределе $\mathcal{L} \to \infty$ ядро $T(x)$, определенное в (2.106), может быть заменено δ-функцией с логарифмически большим коэффициентом. С другой стороны, согласно (2.120) и (2.121), зависящий от импульса вклад в собственно-энергетическую часть SCBA (2.117) также в $\mathcal{L}$ раз меньше ее постоянной части $-ib$.

Таким образом, в главном порядке по большому логарифму $\mathcal{L}$ вершина взаимодействия, как и собственно-энергетическая часть SCBA, могут считаться не зависящими от импульса. Но тогда мы немедленно приходим к заключению, что в главном порядке по $\mathcal{L}$ любая диаграмма высшего порядка равна нулю, поскольку все полюса подынтегрального выражения $\prod_a G(\mu_a)$ лежат в верхней полуплоскости. Такое сокращение связано с *киральностью* теории, которая проявляется в линейной зависимости спектра локализованных состояний от углового момента. Но локальная киральная теория тривиальна: все диаграммы, за исключением входящих в последовательность SCBA, равны нулю. Таким образом, чтобы получить ненулевой вклад, нужно учесть отклонение от локальности (т. е. зависимость $\mathcal{T}(p)$ от импульса), что уменьшит оценку (2.125) на множитель $\mathcal{L}^{-1}$. Киральность теории является причиной отличия от случая одномерного грязного провода [45], где функция Грина SCBA зависит от модуля $|x|$, и высшие диаграммы для собственно-энергетической части оказываются порядка вклада SCBA в одноканальном приближении.

Итак, мы показали, что *киральность* вместе с *квазилокальностью* теории приводят к уменьшению в $\mathcal{L}^{-1}$ раз каждой диаграммы за рамками SCBA. Т. е. в нашей одномерной задаче параметр $\mathcal{L} \gg 1$ формально играет роль эффективного числа каналов, большая величина которого позволяет вывести σ-модель для одномерного провода [46]. Параметр $\mathcal{L} = \ln\frac{N}{b} \simeq \ln\Delta\tau$ растет с уменьшением беспорядка, что, казалось бы, приводит к парадоксу, поскольку он остается большим при $b \sim 1$, когда SCBA заведомо неприменимо. Отметим, однако, что вышеприведенный анализ проводился при $b \gg 1$, когда суммирование может быть заменено интегрированием, и можно использовать аргументы о положении полюсов подынтегрального выражения. При $b \sim 1$ это рассуждение неприменимо и высшие диаграммы становятся того же порядка, что и SCBA.

Исследуем теперь роль осциллирующего множителя $(-1)^{\mu-\mu'+m}$ в уравнении (2.112) для вершины взаимодействия. Рассмотрим n-петлевую диаграмму для собственно-энергетической части с канонической параметризацией внутренних импульсов и некоторую (i-ю) примесную линию в ней. Предположим, эта линия охватывает r функций Грина. Посмотрим, как изменится относительный знак диаграммы, если увеличить импульс m_i, переносимый линией

i на единицу. Для каждого фиксированного i все остальные $n-1$ примесных линий могут быть разделены на три группы. У пунктиров первой группы оба конца оказываются охваченными i-й линией; у пунктиров второй группы охваченным оказывается только один конец; наконец, третья группа содержит пунктиры, которые не охватываются совсем. Соответствующая классификация показана на рис. 4. Согласно (2.112), знак i-й линии не меняется при изменении $m_i \mapsto m_i + 1$. Аналогично, легко проверить, что сохраняется знак линий из первой и третьей групп. Однако, при этом вклад каждой линии, принадлежащей ко второй группе, меняет знак. Четность числа линий второго типа совпадает с четностью r. Следовательно, при изменении m_i на $m_i + 1$, общий знак диаграммы сохраняется (меняется), если r — четное (нечетное).

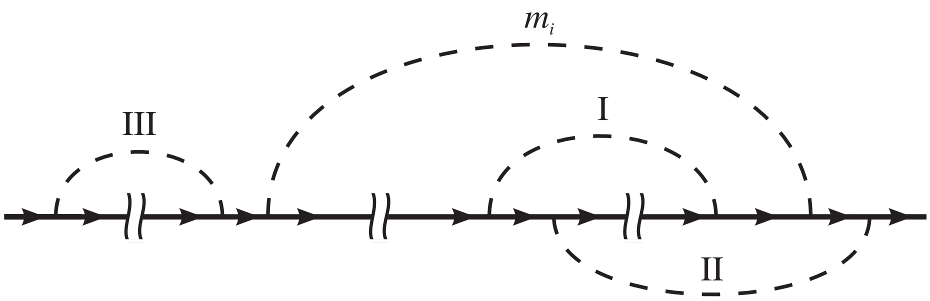

Рис. 4. Часть диаграммы, содержащая примесную линию i. Римскими цифрами показаны представители трех групп примесных линий относительно линии i. См. подробности в тексте.

Это наблюдение приводит к сильному уменьшению существенных в теории диаграмм. Назовем диаграмму «неправильной», если она содержит хотя бы одну примесную линию, охватывающую нечетное число функций Грина. Остальные диаграммы назовем «правильными». Рассмотрим сначала «правильную» диаграмму. Она дается суммой вкладов, соответствующих различным импульсам $\{m_j\}$ примесных линий. Согласно правилам диаграммной техники, вклад от члена с всеми $m_j = 0$, не содержит знаков (-1) от вершинных функций (2.112) и положителен. Все остальные вклады могут быть получены из этого путем последовательных изменений некоторых m_i на единицу. Так как для «правильной» диаграммы такие операции не меняют ее знака, то все вклады имеют одинаковый знак, т. е. множители $(-1)^{\mu-\mu'+m}$ всегда компенсируются и не приводят к дополнительному подавлению диаграммы. Итак, любая «правильная» диаграмма в оказывается в $\mathcal{L}$ раз меньше, чем вклад SCBA.

Рассмотрим теперь «неправильную» диаграмму. В ней существует хотя бы одна примесная линия i, охватывающая нечетное число функций Грина. При суммировании по m_i возникают знакочередующийся ряд. Для оценки результата суммирования заметим, что $\mathcal{T}(k+1) - \mathcal{T}(k) \sim 1/k \sim 1/b$ и $G(k+1) - G(k) \sim 1/G^2(k) \sim 1/b^2$. Таким образом, вклад от «неправильной» диаграммы по крайней мере в g раз меньше, чем от «правильной», и им можно пренебречь.

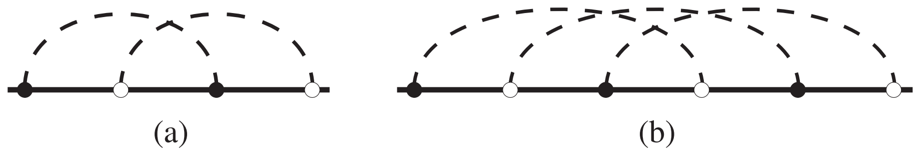

Рис. 5. (a) «Неправильная» диаграмма второго порядка для собственной энергии; (b) единственная «правильная» диаграмма в третьем порядке. О раскраске вершин — см. текст.

Существует простой способ рисовать «правильные» диаграммы. Окрасим все вершины диаграммы в черный и белый цвета поочередно. Диаграмма оказывается «правильной» тогда и только тогда, когда каждая примесная линия имеет концы разного цвета, см. рис. 5. Отметим, что первая нетривиальная диаграмма второго порядка с пересечением примесных линий, показанная на рис. 5a, согласно этой классификации оказывается «неправильной». Первая нетривиальная «правильная» диаграмма возникает в третьем порядке (см. рис. 5b).

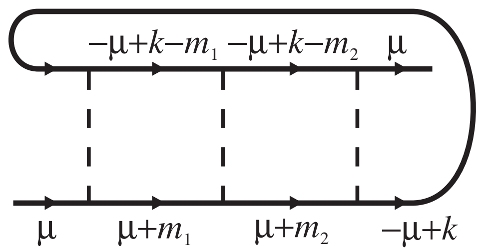

Рис. 6. Диаграмма, изображенная на рис. 5b, перерисованная чтобы показать ее связь с куперонной лестницей.

Третий порядок

Вычислим «правильную» диаграмму третьего порядка, изображенную на рис. 5b, в ведущем порядке по $\mathcal{L}$. Если нарисовать ее так, как показано на рис. 6, то станет видно, что она принадлежит к куперонной последовательности. Для ее вычисления удобно использовать параметризацию импульсов, показанную на рис. 6. Согласно (2.112) и (2.114), вклад этой диаграммы дается выражением

$$\Sigma^{(3)}(\mu) = \left(\frac{g}{\pi}\right)^3 \sum_{m_1 m_2 k} \frac{[\mathcal{T}(k) + \mathcal{T}(k - m_1 - 2\mu)]}{(\varepsilon - \mu - m_1 + ib)(\varepsilon - \mu - m_2 + ib)} \times$$
$$\times \frac{[\mathcal{T}(k) + \mathcal{T}(k - m_2 - 2\mu)] \cdot [\mathcal{T}(k) + \mathcal{T}(m_2)]}{(\varepsilon + \mu - k + ib)(\varepsilon + \mu - k + m_1 + ib)(\varepsilon + \mu - k + m_2 + ib)}, \tag{2.127}$$

где восстановлено ненулевое значение ε. В данном выражении k имеет смысл полного входящего импульса куперона. Стоит отметить, что в уравнении (2.127) не зависящие от m_i члены $\mathcal{T}(k)$ происходят из первого члена в примесной линии (2.112), тогда как зависящие от внутренних импульсов m_i члены $\mathcal{T}(p)$, обусловлены вторым членом в выражении для примесной линии. После интегрирования по m_1 и m_2, набирающегося с $m_i \sim b$, получим

$$\Sigma^{(3)}(\mu) = \left(\frac{g}{\pi}\right)^3 \sum_k \frac{(2\pi i)^2}{(k - 2\varepsilon - 2ib)^2} \frac{[\mathcal{T}(k) + \mathcal{T}(b)]^3}{\varepsilon + \mu - k + ib}. \tag{2.128}$$

Вспомнив, что $b = g\mathcal{L} = g[\mathcal{T}(0) + \mathcal{T}(b)]$, перепишем это выражение в виде

$$\Sigma^{(3)}(\mu) = \frac{b}{\pi} \sum_k G(k - \mu) \frac{\left(1 - \frac{g}{b}[\mathcal{T}(0) - \mathcal{T}(k)]\right)^3}{\left(1 + \frac{i}{2b}(k - 2\varepsilon)\right)^2}. \tag{2.129}$$

Это уравнение содержит вклад куперонной поддиаграммы и функцию Грина, замыкающую ее противоположные концы.

В согласии с анализом, представленным выше, вклад третьего порядка оказывается малым: $\Sigma^{(3)}(\mu)/\Sigma_0(\mu) \sim \mathcal{L}^{-1} \ll 1$, поскольку все полюса подынтегрального выражения в (2.129) лежат в верхней полуплоскости. Однако, суммирование геометрической прогрессии для куперона может привести к сингулярному вкладу, что заслуживает отдельного рассмотрения.

Суммирование куперонной лестницы

Основной вклад в куперонную последовательность вносят «правильные» диаграммы нечетного порядка $2m+1$. Диаграмма с $m = 1$ была вычислена выше. Вычислим теперь куперонную диаграмму при $m > 1$ и затем просуммируем последовательность. Повторив те же шаги, что и при выводе уравнения (2.129), найдем вклад $(2m+1)$-ого порядка:

$$\Sigma^{(2m+1)}(\mu)=\frac{b}{\pi}\sum_k G(k-\mu)\frac{\Big(1-\frac{g}{b}[\mathcal{T}(0)-\mathcal{T}(k)]\Big)^{2m+1}}{\Big(1+\frac{i}{2b}(k-2\varepsilon)\Big)^{2m}}. \qquad (2.130)$$

Таким образом, $\Sigma^{(2m+1)}(\mu)$ действительно образуют геометрическую последовательность, которая легко могут быть просуммирована:

$$\Sigma_{C'}(\mu)=\frac{b}{\pi}\sum_k G(k-\mu)\frac{\Big(1-\frac{g}{b}[\mathcal{T}(0)-\mathcal{T}(k)]\Big)^{3}}{\Big(1+\frac{i}{2b}(k-2\varepsilon)\Big)^{2}-\Big(1-\frac{g}{b}[\mathcal{T}(0)-\mathcal{T}(k)]\Big)^{2}}. \qquad (2.131)$$

Поскольку сумма определяется $k\le b$, это выражение можно упростить:

$$\Sigma_{C'}(\mu)=\sum_{m=1}^{\infty}\Sigma^{(2m+1)}(\mu)=\frac{b^2}{\pi}\sum_k\frac{G(k-\mu)}{2g[\mathcal{T}(0)-\mathcal{T}(k)]+i(k-2\varepsilon)}. \qquad (2.132)$$

Перед анализом этого выражения проясним роль «неправильных» поддиаграмм четного порядка $\Sigma^{(2m)}(\mu)$ в куперонной лестнице. Хотя их вклад и мал, рассмотрим его, чтобы установить связь с σ-моделью, выведенной в разделе 9. По аналогии с (2.132), вклад «неправильной» части куперонной последовательности дается выражением

$$\Sigma_{C''}(\mu)=\sum_{m=1}^{\infty}\Sigma^{(2m)}(\mu)=\frac{b^2}{\pi}\sum_k(-1)^k\frac{G(k-\mu)}{2g[\mathcal{T}(0)-\mathcal{T}(k)]+i(k-2\varepsilon)}. \qquad (2.133)$$

Складывая уравнения (2.132) и (2.133), приходим к выводу, что в однокуперонную собственно-энергетическую часть дают вклад только четные импульсы:

$$\Sigma_C(\mu)=\frac{2b^2}{\pi}\sum_m G(2m-\mu)C(2m), \qquad (2.134)$$

где куперонный пропагатор

$$C(k)=\frac{1}{2g[\mathcal{T}(0)-\mathcal{T}(k)]+i(k-2\varepsilon)}. \qquad (2.135)$$

Его нулевая гармоника сингулярна при $\varepsilon=0$, что указывает на необходимость непертурбативного учета пространственно однородных куперонов, осуществляемого с помощью нульмерной σ-модели. Напротив, вклад высших мод может быть вычислен по теории возмущений: переходя от суммирования к интегрированию в уравнении (2.134), используя асимптотику (Ж5) для вершинной функции $\mathcal{T}(0)-\mathcal{T}(k)\sim\ln|k|$ на больших импульсах, опуская контур интегрирования на разрез логарифма $(-i\infty,-i0)$, получим

$$\Sigma_C(\mu)=-4ib^2g\int_0^{\infty}\frac{dx}{(b+x-i\varepsilon-i\mu)[(2g\ln x+x-2i\varepsilon)^2+(\pi g)^2]}. \qquad (2.136)$$

При $\varepsilon \ll b$ интеграл определяется $x \ll b$ (при условии, что $g \ln g \ll b$, т. е. $\ln g \ll \mathcal{L}$), так что можно взять $G(-ix-\mu)$ при $x=0$. Вычисляя оставшийся интеграл в главном порядке по $\ln g$, находим

$$\Sigma_C(\mu) = \frac{-ib^2 g}{(b - i\varepsilon - i\mu)(g\ln g - i\varepsilon)}. \tag{2.137}$$

Уравнение (2.137) определяет однокуперонный вклад в собственно-энергетическую часть. Он максимален при $\varepsilon = 0$:

$$\frac{\Sigma_C(\mu)}{\Sigma_0(\mu)} \sim \frac{1}{\ln g}. \tag{2.138}$$

Таким образом, если $\ln g$ не очень велик, то вклад куперонных возбуждений может оказаться порядка вклада от самосогласованного борновского приближения. Соответствующая добавка в плотность состояний имеет вид

$$\delta\rho(\varepsilon) = -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Im}\sum_{\mu} G(\mu)^2\Sigma_C(\mu) = \mathrm{Re}\,\frac{b^2 g}{2(\varepsilon + ib)^2(g\ln g - i\varepsilon)}. \tag{2.139}$$

При $\varepsilon \ll b$ это выражение можно упростить:

$$\delta\rho(\varepsilon) = -\frac{1}{2\ln g} \times \frac{1}{1 + \varepsilon^2/(g\ln g)^2}. \tag{2.140}$$

Поправка имеет порядок $(\ln g)^{-1}$ при малых ε, и исчезает при $\varepsilon > g\ln g$. Уравнение (2.140) определяет перенормировку беспорядком среднего расстояния между уровнями вблизи ферми-поверхности: $\omega_0 \to \tilde{\omega}_0$, где

$$\tilde{\omega}_0 \simeq \left(1 + \frac{1}{2\ln g}\right)\omega_0. \tag{2.141}$$

Именно это перенормированное межуровневое расстояние входит в результат (2.78) нульмерной σ-модели.

8. Суперсимметричная теория поля в матричной модели

Здесь мы выведем суперсимметричную теорию поля для усредненной матричной функции Грина (2.79) в x-пространстве. Определяя супер-N-вектор

$$\phi = \begin{pmatrix} \chi \\ S \end{pmatrix}, \tag{2.142}$$

где χ и S — грассмановы и обычные N-вектора соответственно, перепишем уравнение (2.79) в виде

$$\mathcal{G}^R(\varepsilon) = \frac{-i}{\omega_0} \int \phi_\alpha \phi_\alpha^+ e^{-\mathcal{S}\{\phi^*,\phi\}} D\phi^* D\phi. \tag{2.143}$$

Здесь индекс α обозначает либо фермионную, либо бозонную компоненту; суммирование по нему не предполагается. Вес в функциональном интеграле (2.143) дается действием

$$\mathcal{S}\{\phi^*, \phi\} = -i\phi^+[\varepsilon_+ - H_0 - V]\phi. \tag{2.144}$$

Так же, как и в разделе 3, необходимо удвоить число компонент суперполя. В данном случае это удобно сделать следующим образом:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi \\ \gamma\phi^* \end{pmatrix}. \tag{2.145}$$

Аналогично обозначениям, принятым в разделе 3, мы будем называть сектора суперполя ψ, определенные в уравнении (2.145), частичным (P) и дырочным (H) пространствами. Во избежание возможных недоразумений подчеркнем, что обозначения ϕ и ψ, используемые в этом разделе, не имеют прямого отношения к величинам $\phi(\mathbf{r})$ и $\psi(\mathbf{r})$ из раздела 3.

После процедуры удвоения (2.145) вектора ψ и ψ^+ становятся линейно зависимыми:

$$\psi^+ = (S\psi)^T, \qquad S = -\gamma \otimes C_0, \tag{2.146}$$

где матрица C_0 определена в уравнении (2.23). Действие (2.144), записанное через вектора ψ, имеет вид

$$\mathcal{S}\{\psi^*, \psi\} = -i\psi^+[\varepsilon_+ - \sigma_z H_0 - \sigma_z V]\psi. \tag{2.147}$$

Вводя операцию зарядового сопряжения векторов посредством

$$\bar{\psi} = \psi^+\sigma_z = (C\psi)^T, \tag{2.148}$$

где

$$C = \sigma_z S = -\gamma\sigma_z C_0, \tag{2.149}$$

перепишем действие в виде

$$\mathcal{S}\{\bar{\psi}, \psi\} = -i\bar{\psi}[\varepsilon_+\sigma_z - H_0 - V]\psi. \tag{2.150}$$

Переходя от дискретного индекса μ к непрерывной переменной $x \in [0, 2\pi)$, введенной в уравнении (2.89), и используя определение (2.86) матрицы γ, получим структуру вектора $\psi(x)$ в PH пространстве:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi(x) \\ e^{ix}\phi^*(x+\pi) \end{pmatrix} \tag{2.151}$$

По аналогии с (2.145) имеем

$$\psi^*(x) = S(x)\psi(x+\pi), \tag{2.152}$$

где матрица $S(x)$ обладает явной зависимостью от x:

$$S(x) = -e^{-ix}C_0. \tag{2.153}$$

В соответствии с уравнением (2.148), зарядово сопряженное поле дается выражением

$$\bar{\psi}(x) = [C(x)\psi(x+\pi)]^T, \tag{2.154}$$

где

$$C(x) = \sigma_z S(x) = -e^{-ix}\sigma_z C_0. \tag{2.155}$$

Операция зарядового сопряжения для суперматриц определяется с помощью матрицы $C(x)$:

$$\bar{A}(x, x') = C^*(x)A^T(x'+\pi, x+\pi)C^T(x'), \tag{2.156}$$

здесь A^T обозначает транспонирование в FB – PH пространствах.

С другой стороны, уравнение (2.154) можно рассматривать как определение матрицы (интегрального оператора) $\mathcal{C}$, действующей также и в x-пространстве:

$$\bar{\psi} = (\mathcal{C}\psi)^T, \qquad \bar{A} = \mathcal{C}^*A^T\mathcal{C}^T. \tag{2.157}$$

В этих уравнениях имеется в виду полное транспонирование (в FB, PH и x-пространствах). Сдвиг на π в уравнении (2.151) и нелокальность оператора $\mathcal{C}$ связаны с присутствием сверхпроводимости. Они имеют то же происхождение, что и сдвиг на π в корреляторе (2.105) матричных элементов случайного потенциала.

Будучи выраженным через суперполе $\psi(x)$, действие (2.150) имеет вид

$$
\mathcal{S}\{\bar{\psi},\psi\} = -i\left[\int \frac{dx}{2\pi}\bar{\psi}(x)\left(\epsilon_{+}\sigma_z - i\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}\right)\psi(x) - \iint \frac{dxdx'}{(2\pi)^2}\bar{\psi}(x)V(x,x')\psi(x')\right]. \tag{2.158}
$$

Усредняя по беспорядку и используя выражение (2.105) для коррелятора случайного потенциала, получаем эффективное взаимодействие между полями $\psi(x)$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}_{int}\{\bar{\psi},\psi\} &= \frac{1}{2}\iiiint \frac{dx_1dx_2dx_3dx_4}{(2\pi)^4}\mathcal{W}(x_1,x_2,x_3,x_4)\bar{\psi}(x_1)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_3)\psi(x_4) \\
&= \frac{g}{2\pi}\iint \frac{dx_1dx_2}{(2\pi)^2}T(x_1-x_2+\pi)\times \\
&\times\left[\bar{\psi}(x_1)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_2)\psi(x_1) - e^{i(x_1-x_2)}\bar{\psi}(x_1)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_1+\pi)\psi(x_2+\pi)\right]
\end{aligned} \tag{2.159}
$$

Определение зарядового сопряжения оказывается согласованным со структурой коррелятора $\mathcal{W}(x_1,x_2,x_3,x_4)$, в результате чего первый и второй член в квадратных скобках совпадают, что легко может быть проверено с учетом уравнений (2.151) и (2.154). Таким образом, уравнение (2.159) может быть представлено в одной из двух эквивалентных форм:

$$
\mathcal{S}_{int}\{\bar{\psi},\psi\} = \frac{g}{\pi}\iint \frac{dx_1dx_2}{(2\pi)^2}T(x_1-x_2+\pi)\bar{\psi}(x_1)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_2)\psi(x_1) \tag{2.160}
$$

$$
= -\frac{g}{\pi}\iint \frac{dx_1dx_2}{(2\pi)^2}T(x_1-x_2+\pi)e^{i(x_1-x_2)}\bar{\psi}(x_1)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_1+\pi)\psi(x_2+\pi). \tag{2.161}
$$

Преобразование Хаббарда-Стратоновича

В силу нелокальности члена четвертого порядка $\mathcal{S}_{int}$ в x-пространстве, существуют два принципиально различных типа суперматричного спаривания: локальное $\langle\psi(x)\bar{\psi}(x)\rangle_{sl}$ и нелокальное $\langle\psi(x_2)\psi^T(x_1)\rangle_{sl}$. Следовательно, при преобразовании Хаббарда-Стратоновича необходимо учесть оба спаривания, что осуществляется введением локального $P(x)$ и нелокального $R(x_1,x_2)$ суперматричных полей.

Для осуществления локального распаривания удобно использовать представление (2.160). Перепишем член четвертого порядка (2.160) с помощью суперследа

$$
\mathcal{S}_{int}\{\bar{\psi},\psi\} = -\frac{g}{\pi}\operatorname{str}\iint \frac{dx_1dx_2}{(2\pi)^2}T(x_1-x_2+\pi)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_1)\psi(x_2)\bar{\psi}(x_2) \tag{2.162}
$$

и распарим его суперматричным полем $P(x)$:

$$e^{-\mathcal{S}_{int}\{\bar\psi,\psi\}} = \int \exp\biggl\{-\frac{\pi g}{4}\,\mathrm{str}\iint \frac{dx_1 dx_2}{(2\pi)^2} T^{-1}(x_1 - x_2 + \pi) P(x_1) P(x_2)$$
$$+ g\,\mathrm{str}\int \frac{dx}{2\pi} P(x)\psi(x)\bar\psi(x)\biggr\} DP(x). \tag{2.163}$$

Нелокальное преобразование Хаббарда-Стратоновича соответствует либо спариванию $\langle\psi(x_2)\psi^T(x_1)\rangle_{sl}$ в уравнении (2.160), либо спариванию $\langle\psi(x_2)\bar\psi(x_1 + \pi)\rangle_{sl}$ в уравнении (2.161). Оба варианта приводят к одному результату, т. к. $\bar\psi(x_1+\pi)$ и $\psi^T(x_1)$ являются линейно зависимыми по определению. Однако, выражение (2.161) оказывается более удобным для вычислений. Переписывая действие с помощью суперследа и сдвигая $x_1 \to x_1 + \pi$, получаем

$$\mathcal{S}_{int}\{\bar\psi,\psi\} = -\frac{g}{2}\,\mathrm{str}\iint \frac{dx_1 dx_2}{(2\pi)^2} T(x_1 - x_2) e^{i(x_1 - x_2)} \psi(x_2)\bar\psi(x_1)\psi(x_2+\pi)\bar\psi(x_1+\pi). \tag{2.164}$$

Этот член расцепляется введением нелокального суперматричного поля $R(x_1, x_2)$:

$$e^{-\mathcal{S}_{int}\{\bar\psi,\psi\}} = \int \exp\biggl\{-\frac{\pi g}{4}\,\mathrm{str}\iint \frac{dx_1 dx_2}{(2\pi)^2} \frac{e^{i(x_2-x_1)}}{T(x_1-x_2)} R(x_1,x_2) R(x_1+\pi, x_2+\pi)$$
$$+ g\,\mathrm{str}\iint \frac{dx_1 dx_2}{(2\pi)^2} R(x_1+\pi, x_2+\pi)\psi(x_2)\bar\psi(x_1)\biggr\} DR(x_1,x_2). \tag{2.165}$$

Таким образом, действие принимает вид

$$\mathcal{S}\{\bar\psi,\psi,P,R\} = \mathcal{S}_\psi + \mathcal{S}_P + \mathcal{S}_R, \tag{2.166}$$

где

$$\mathcal{S}_\psi = -i\iint \frac{dx_1 dx_2}{(2\pi)^2} \bar\psi(x_1)\mathcal{A}_{x_1x_2}\psi(x_2); \tag{2.167}$$

$$\mathcal{S}_P = \frac{\pi g}{4}\,\mathrm{str}\iint \frac{dx_1 dx_2}{(2\pi)^2} T^{-1}(x_1 - x_2 + \pi) P(x_1) P(x_2); \tag{2.168}$$

$$\mathcal{S}_R = \frac{\pi g}{4}\,\mathrm{str}\iint \frac{dx_1 dx_2}{(2\pi)^2} \frac{e^{i(x_2-x_1)}}{T(x_1-x_2)} R(x_1,x_2) R(x_1+\pi, x_2+\pi). \tag{2.169}$$

Здесь оператор $\mathcal{A}$ имеет следующие матричные элементы:

$$\mathcal{A}_{x_1x_2} = 2\pi\delta(x_1 - x_2)\left(\epsilon_+\sigma_z - i\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{1}{2} + igP(x_1)\right) + igR(x_1+\pi, x_2+\pi). \tag{2.170}$$

Наконец, выполняя гауссово интегрирование по супервектору $\psi(x)$ (детали приведены в Приложении B), получим эффективное действие для суперматричных полей $P(x)$ и $R(x,x')$:

$$\mathcal{S}_{eff}\{P,R\} = \mathcal{S}_A + \mathcal{S}_P + \mathcal{S}_R. \tag{2.171}$$

$\mathcal{S}_A$ имеет вид

$$\mathcal{S}_A = -\frac{1}{2}\,\mathbf{Str}\ln\hat{\mathcal{P}}\mathcal{A}, \tag{2.172}$$

где

$$\hat{\mathcal{P}}\mathcal{A} = \frac{\mathcal{A}-\bar{\mathcal{A}}}{2}. \tag{2.173}$$

Легко показать, что $\epsilon_+\sigma_z - i\partial - 1/2$ инвариантно относительно действия проектора $\hat{\mathcal{P}}$.

Диагональное седловое решение

Найдем седловое решение для действия $\mathcal{S}_{eff}$, диагональное в FB и PH пространствах. На седловом решении $\mathcal{A}$ инвариантно относительно $\hat{\mathcal{P}}$, поэтому мы может опустить $\hat{\mathcal{P}}$ в уравнении (2.171). Выполняя функциональное дифференцирование, приходим к следующим уравнениям:

$$P(x) = \frac{i}{\pi}\int T(x-x'+\pi)G(x',x')\frac{dx'}{2\pi}, \tag{2.174}$$

$$R(x,x') = \frac{i}{\pi}e^{i(x-x')}T(x-x')G(x',x), \tag{2.175}$$

где G — функция Грина интегро-дифференциального оператора $\mathcal{A}$:

$$\left(\epsilon_+\sigma_z - i\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2} + igP(x)\right)G(x,x') + \\ + ig\int\frac{dy}{2\pi}R(x+\pi,y+\pi)G(y,x') = 2\pi\delta(x-x'). \tag{2.176}$$

На седловом решении $P(x)$ не зависит от x, $R(x,y)\equiv R(x-y)$ и $G(x,y)\equiv G(x-y)$. В результате, подставляя уравнения (2.174) и (2.175) в (2.176), приходим к уравнению самосогласования

$$\left(\epsilon_+\sigma_z - i\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2} - \frac{g}{\pi}\mathcal{T}(0)G(0)\right)G(x) - \\ - \frac{g}{\pi}\int\frac{dy}{2\pi}e^{i(x-y)}T(x-y)G(y-x)G(y) = 2\pi\delta(x). \tag{2.177}$$

Выполняя преобразование Фурье назад к μ-представлению, приходим к выводу, что уравнение (2.177) тождественно совпадает с уравнениями самосогласованного борновского приближения (2.115) и (2.116) при условии, что ϵ_+ заменено на $\epsilon_+\sigma_z$. Знак суперматричной собственно-энергетической части $\Sigma(\mu)$ определяется инфинитезимальным членом $i\delta\sigma_z$:

$$\Sigma(\mu) = \sigma_z \Sigma_0(\mu), \tag{2.178}$$

где $\Sigma_0(\mu)$ дается уравнением (2.117). Положим $\varepsilon = 0$ и воспользуемся результатами раздела 7. Пренебрегая $s(\mu)$ по сравнению с b в главном порядке по $\mathcal{L}^{-1}$, найдем функцию Грина в x-пространстве:

$$G(x) = -2\pi i \sigma_z \theta(-\sigma_z x) e^{-b|x|}. \tag{2.179}$$

Подставляя $G(x)$ в уравнения (2.174) и (2.175) и опуская медленную зависимость $e^{i(x-x')}$ в (2.175), найдем седловые значения:

$$P_0 = \sigma_z \mathcal{T}(0) = \sigma_z \ln \sqrt{N}, \tag{2.180}$$

$$R_0(x) \approx 2\sigma_z \theta(-\sigma_z x) T(x) e^{-b|x|}. \tag{2.181}$$

В заключение, принимая во внимание свойство $G^h(x) = -G^p(-x)$, найдем, что P и R члены в уравнении (2.170) оказываются инвариантными относительно действия проектора $\hat{\mathcal{P}}$, что оправдывает сделанное выше предположение.

Нульмерная σ-модель

Седловое решение оказывается вырожденным при $\varepsilon = 0$. Седловое многообразие может быть получено из диагонального решения P_0, $R_0(x)$ путем вращения однородными в пространстве матрицами U [5]:

$$P = U^{-1} P_0 U, \qquad R(x) = U^{-1} R_0(x) U. \tag{2.182}$$

Для не зависящих от x матриц U такое вращение сохраняет члены $\mathcal{S}_P$ и $\mathcal{S}_R$ в (2.171). Оно также должно оставлять инвариантным $\mathbf{Str} \ln \hat{\mathcal{P}} \mathcal{A}$, что накладывает условия $\hat{\mathcal{P}} P = P$ и $\hat{\mathcal{P}} R = R$. Так же, как в разделе 4, они приводят к требованию псевдоунитарности:

$$U \bar{U} = 1. \tag{2.183}$$

Записывая U в виде $U = \exp(\mathrm{g})$, находим уравнение для генераторов:

$$\mathrm{g} + \bar{\mathrm{g}} \equiv \mathrm{g} + \sigma_z C_0 \mathrm{g}^T C_0^T \sigma_z = 0, \tag{2.184}$$

что в точности совпадает с уравнением (2.52), выведенном в координатном представлении. Следовательно, мы можем дословно повторить все аргументы, приводящие к параметризации (2.58) для U и, следовательно, к уравнению (2.62) для Q. Интегрирование по седловому многообразию при конечном ε, снимающем вырождение, приводит к результату (2.78) для $\langle \rho(\epsilon) \rangle$.

9. Вывод σ-модели

Учтем теперь медленные флуктуации вдоль седлового многообразия:

$$P(x) = U^{-1}(x)P_0U(x), \tag{2.185}$$

$$R(x,x') = U^{-1}(x)R_0(x-x')U(x'). \tag{2.186}$$

Продольные флуктуации, изменяющие собственные значения матриц $P(x)$ и $R(x,x')$, согласно результатам раздела 7, имеют большую щель и подавлены на фактор $\mathcal{L} \gg 1$.

Существенной особенностью рассматриваемой теории является то, что квадратичные члены $\mathcal{S}_P$ и $\mathcal{S}_R$, даваемые уравнениями (2.168) и (2.169), дают вклад в эффективное действие для медленных флуктуаций $U(x)$. Это отличается от случая стандартной σ-модели для неупорядоченных металлов [5], где эффективное действие определялось только членом $\mathbf{Str}\ln(\ldots)$. Разница связана с нелокальностью преобразования Хаббарда-Стратоновича (2.163), (2.165).

Рассмотрим сначала квадратичный по P член $\mathcal{S}_P$. Подставляя уравнение (2.185) в (2.168), получим

$$\mathcal{S}_P = \frac{\pi g}{4}\,\mathrm{str}\iint\frac{dx_1dx_2}{(2\pi)^2}T^{-1}(x_1-x_2+\pi)U^{-1}(x_1)P_0U(x_1)U^{-1}(x_2)P_0U(x_2). \tag{2.187}$$

Используя седловое решение P_0 из уравнения (2.180) и определяя

$$Q(x) = U^{-1}(x)\sigma_zU(x), \tag{2.188}$$

перепишем этот член в виде

$$\mathcal{S}_P[Q] = \frac{\pi g}{4}\mathcal{T}^2(0)\iint\frac{dx_1dx_2}{(2\pi)^2}T^{-1}(x_1-x_2+\pi)\,\mathrm{str}\,Q(x_1)Q(x_2). \tag{2.189}$$

Для его анализа удобно воспользоваться представлением Q через суперматрицу W, на которую не наложено нелинейных связей [5]:

$$Q(x) = \sigma_z\left[1+W(x)+\frac{1}{2}W^2(x)+O(W^3)\right], \tag{2.190}$$

где диагональные в пространстве PH элементы $W(x)$ равны нулю. Тогда

$$\mathrm{str}\,Q(x_1)Q(x_2) = \frac{1}{2}\,\mathrm{str}[W(x_1)-W(x_2)]^2+O(W^3). \tag{2.191}$$

Подставляя квадратичную часть в уравнение (2.189), найдем

$$\mathcal{S}_P^{(2)}[W] = \frac{\pi g}{8}\mathcal{T}^2(0)\iint \frac{dx_1 dx_2}{(2\pi)^2} T^{-1}(x_1 - x_2 + \pi)\,\mathrm{str}[W(x_1) - W(x_2)]^2. \tag{2.192}$$

Переходя к Фурье представлению

$$W(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} W_m e^{-imx}, \tag{2.193}$$

получим

$$\mathcal{S}_P^{(2)}[W] = \frac{\pi g}{4}\mathcal{T}^2(0)\sum_m \left(\frac{1}{\mathcal{T}(0)} - \frac{(-1)^m}{\mathcal{T}(m)}\right)\mathrm{str}\, W_m W_{-m}. \tag{2.194}$$

Согласно этому уравнению, поведение четных и нечетных гармоник оказывается существенно различным. Для четных гармоник логарифмически большая щель почти полностью сокращается, так что они описывают низкоэнергетический сектор теории. Для нечетных гармоник такое сокращение отсутствует, их щель остается порядка большой щели для продольных флуктуаций. Различие между четными и нечетными модами было продемонстрировано на диаграммном языке, где только четные входящие моменты давали вклад в куперонную лестницу, ср. уравнение (2.134).

Таким образом, только четные гармоники представляют собой настоящие голдстоуновские моды с массой, исчезающей при $m = 0$:

$$\mathcal{S}_P^{(2)}[W] = -\frac{\pi g}{4}\mathcal{T}(0)\sum_m \frac{\mathcal{T}(0) - \mathcal{T}(2m)}{\mathcal{T}(2m)}\,\mathrm{str}\, W_{2m} W_{-2m}. \tag{2.195}$$

Разность $\mathcal{T}(0) - \mathcal{T}(2m)$ посчитана в уравнении (Ж5). Пренебрегая отличием $\mathcal{T}(2m)$ от $\mathcal{T}(0)$ в знаменателе, находим

$$\mathcal{S}_P^{(2)}[W] = -\frac{\pi g}{2}\sum_m \sum_{k=0}^{|m|-1} \frac{1}{2k+1}\,\mathrm{str}\, W_{2m} W_{-2m} \approx -\frac{\pi g}{4}\sum_m \ln|m|\,\mathrm{str}\, W_{2m} W_{-2m}, \tag{2.196}$$

где приближенное равенство справедливо в пределе $|m| \gg 1$.

Для сходимости σ-модели действие (2.196) должно быть положительно определено. Легко показать, что для *четных* гармоник параметризация W_{2m} совпадает с полученной в разделе 4 для однородных генераторов $\mathfrak{g}$. Таким образом, можно записать

$$W_{ph}(x) = \begin{pmatrix} iz(x) & \alpha(x) \\ \alpha(x) & 0 \end{pmatrix}_{fb}, \qquad W_{hp}(x) = \begin{pmatrix} iz^*(x) & \beta(x) \\ -\beta(x) & 0 \end{pmatrix}_{fb}. \tag{2.197}$$

Здесь z — комплексное число, α и β — грассмановы числа.

Итак, можно сказать, что член $\mathcal{S}_P$ «запрещает» нечетные моды и генерирует логарифмическую массу четных мод, которая растет с увеличением беспорядка.

Рассмотрим теперь член $\mathcal{S}_R$, квадратичный по нелокальному полю $P(x, x')$. Подставляя уравнения (2.186) и (2.181) в (2.169) и снова пренебрегая $e^{i(x_2-x_1)}$, получим

$$\mathcal{S}_R = \pi g \,\mathrm{str} \iint \frac{dx dx'}{(2\pi)^2} T(x-x') e^{-2b|x-x'|} U^{-1}(x)\sigma_z \theta(\sigma_z(x'-x)) U(x') \times \\ \times U^{-1}(x+\pi)\sigma_z \theta(\sigma_z(x'-x)) U(x'+\pi). \qquad (2.198)$$

В интеграле по разности существенны очень малые $|x - x'| \leq 1/b$, поэтому при изучении медленных гармоник можно пренебречь отличием между x' и x. В результате, получим

$$\mathcal{S}_R = \frac{\pi g}{2} \mathcal{T}(b) \,\mathrm{str} \sum_{\alpha=p,h} \int \frac{dx}{2\pi} \left[U(x) U^{-1}(x+\pi)\right]_{\alpha\alpha} \left[U(x+\pi) U^{-1}(x)\right]_{\alpha\alpha}. \qquad (2.199)$$

Используя соотношение $A_{pp}B_{pp} + A_{hh}B_{hh} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,(AB + A\sigma_z B\sigma_z)$, перепишем уравнение (2.199) через суперполе $Q(x)$, определенное в (2.188):

$$\mathcal{S}_R[Q] = \frac{\pi g}{4} \mathcal{T}(b) \int \frac{dx}{2\pi} \,\mathrm{str}\, Q(x) Q(x+\pi). \qquad (2.200)$$

Нечетные гармоники $Q(x)$ запрещены членом $\mathcal{S}_P$, в то время как для четных гармоник $Q(x+\pi) = Q(x)$, и $\mathcal{S}_R[Q]$ обращается в нуль. Это означает, что член $\mathcal{S}_R$, отвечающий нелокальному расцеплению, не дает вклада на малых энергиях. Это утверждение является переводом на функциональный язык того обстоятельства, что только первый член в примесной вершине (2.112) (происходящий от вклада плоскости II) дает вклад в куперонную лестницу (ср. уравнение (2.127)).

Рассмотрим, наконец, роль члена $\mathcal{S}_A$. Используя инвариантность суперследа относительно циклических перестановок, запишем уравнение (2.172) в виде

$$\mathcal{S}_A = -\frac{1}{2} \mathbf{Str} \ln \left(G^{-1} + \varepsilon U(x) \sigma_z U^{-1}(x) - i U(x) \frac{\partial U^{-1}(x)}{\partial x} \right). \qquad (2.201)$$

В первом порядке разложения по ε и градиентам матрицы $U(x)$ имеем

$$\mathcal{S}_A^{(1)} = \frac{\pi i}{2} \int \frac{dx}{2\pi} \,\mathrm{str} \left(\varepsilon \sigma_z Q(x) - i \sigma_z U(x) \frac{\partial U^{-1}(x)}{\partial x} \right). \qquad (2.202)$$

Первый член $\varepsilon\,\mathrm{str}(\sigma_z Q)$ является обычным для σ-моделей, а второй — $\sigma_z U(x)\frac{\partial U^{-1}(x)}{\partial x}$ — специфичен для рассматриваемой задачи. Он отражает киральную природу спектра и вводит асимметрию между вращениями по и против часовой стрелки. Отметим также, что он записан через матрицы поворотов $U(x)$ и не выражается в явном виде через суперполе $Q(x)$.

Раскладывая (2.201) до второго порядка по градиентам, получаем

$$\mathcal{S}_A^{(2)} = -\frac{1}{4}\,\mathrm{str}\iint \frac{dx dx'}{(2\pi)^2} U(x)\frac{\partial U^{-1}(x)}{\partial x} G(x-x') U(x') \frac{\partial U^{-1}(x')}{\partial x'} G(x'-x). \quad (2.203)$$

Подставляя функцию Грина из уравнения (2.179) и интегрируя по $x-x'$, находим

$$\mathcal{S}_A^{(2)} = -\frac{\pi}{2b}\,\mathrm{str}\int \frac{dx}{2\pi}\left[U(x)\frac{\partial U^{-1}(x)}{\partial x}\right]_{ph}\left[U(x)\frac{\partial U^{-1}(x)}{\partial x}\right]_{hp}. \quad (2.204)$$

Используя тождество $A_{ph}B_{hp} + A_{hp}B_{ph} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(AB - A\sigma_z B\sigma_z\right)$, приходим к выражению, содержащему только $Q(x)$:

$$\mathcal{S}_A^{(2)} = \frac{\pi}{4b}\,\mathrm{str}\int \frac{dx}{2\pi}\left(\frac{\partial Q(x)}{\partial x}\right)^2. \quad (2.205)$$

Эта часть действия сравнивается со вкладом $\mathcal{S}_P + \mathcal{S}_A^{(1)}$ только для высоковозбужденных мод с $m \sim b$ и может быть опущена при выводе σ-модели. Аналогично, все члены с высшими градиентами оказываются малыми и могут быть опущены.

Теперь мы можем записать явное действие для σ-модели. Учитывая (2.189) и (2.202), получаем

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_\sigma[Q,U] = \frac{\pi g}{4}\mathcal{T}^2(0)\iint \frac{dx_1 dx_2}{(2\pi)^2} T^{-1}(x_1 - x_2 + \pi)\,\mathrm{str}\, Q(x_1)Q(x_2) \\ + \frac{\pi i}{2}\int \frac{dx}{2\pi}\,\mathrm{str}\left(\varepsilon\sigma_z Q(x) - i\sigma_z U(x)\frac{\partial U^{-1}(x)}{\partial x}\right).\end{aligned} \quad (2.206)$$

Здесь $U(x)$ — π-периодическая ($U(x+\pi) = U(x)$) псевдоунитарная ($U^{-1}(x) = \bar{U}(x)$) матрица, $Q(x)$ дается уравнением (2.188). Используя параметризацию (2.190), запишем квадратичную часть действия в виде

$$\mathcal{S}_\sigma^{(2)}[W] = -\frac{\pi}{4}\,\mathrm{str}\sum_m \Big\{g[\mathcal{T}(0) - \mathcal{T}(2m)] + i(m\sigma_z - \varepsilon)\Big\} W_{2m} W_{-2m}. \quad (2.207)$$

Это выражение определяет пропагатор поперечных флуктуаций:

$$\langle W_{2m} W_{-2m}\rangle = -\frac{2}{\pi}\hat{C}(2m), \quad (2.208)$$

где

$$\hat{C}(k) = \frac{1}{2g[\mathcal{T}(0) - \mathcal{T}(2m)] + i(k\sigma_z - 2\varepsilon)} \tag{2.209}$$

является обобщенным куперонным пропагатором. Его PP блок совпадает с пропагатором (2.135), вычисленным в рамках диаграммной техники, что позволяет отождествить ненулевые моды σ-модели (2.206) с купероном, рассмотренным в разделе 7. Отметим, что полное число N локализованных состояний киральной ветви не входит в выражение (2.207). Можно показать, что аналогичное утверждение справедливо для негауссовой части действия.

На языке σ-модели ренормировка средней плотности состояний высшими модами, обнаруженная в разделе 7 (см. уравнение (2.141)), может быть получена следуя работе [47]. Разделим вклады нулевой и высших мод: $Q(x) = U^{-1}Q'(x)U$, где U — пространственно однородная псевдоунитарная матрица (2.58), а $Q'(x)$ дается выражением (2.190), из которого исключена нулевая мода. Усредняя по быстрым модам нульмерное выражение $\langle\rho(\epsilon)\rangle = \frac{1}{4\omega_0}\operatorname{Re}\int \operatorname{str}(k\sigma_z Q)\exp[-(\pi i/2)(\epsilon/\omega_0)\operatorname{str}(\sigma_z Q)]DQ$ в низшем порядке с помощью $\langle Q'\rangle = \sigma_z\left[1 + \frac{1}{2}\sum_m\langle W_{2m}W_{-2m}\rangle\right]$ и деформируя контур интегрирования, как объяснено в разделе 7, получим эффективную ренормировку $\omega_0^{-1} \to \omega_0^{-1}(1 - 1/2\ln g)$, что совпадает с уравнением (2.141) и приводит к соответствующей ренормировке среднего межуровневого расстояния в уравнении (2.76).

Ренормировка средней (на масштабах больших ω_0) плотности состояний связана с различным числом коммутирующих переменных в FF и BB секторах суперматрицы W, см. (2.197). Это приводит к тому, что, в отличие от техники Ефетова, $\langle W^2\rangle \neq 0$, что и ренормирует среднюю плотность состояний. Следует подчеркнуть, что параметризация (2.197) справедлива только для четных гармоник. В то же время, исходя из требований симметрии $Q = \bar{Q}$ и соображений сходимости σ-модели, можно показать, что в параметризации нечетных гармоник W обе угловые переменные содержатся в BB секторе, тогда как FF сектор оказывается тривиальным. Таким образом, учет нечетных мод восстанавливает баланс между числом коммутирующих переменных в FF и BB секторах, но, в силу большой массы нечетных гармоник, они не дают вклада в низкоэнергетическую физику.

Уравнение (2.207) позволяет установить границы применимости нульмерной σ-модели. Нульмерный результат (2.78) для $\langle\rho(\varepsilon)\rangle$ справедлив при условии, что энергия ε не превосходит ω_{Th}, которую, по аналогии со случаем грязного металла, будем называть энергий Таулесса. При энергиях выше ω_{Th} нульмерный результат, соответствующий теории случайных матриц, сильно модифицируется за счет возбужденных мод σ-модели. Однако, медленное увеличение щели в куперонном пропагаторе (2.209) не позволяет отождествить энергию Таулесса с массой первой ненулевой моды, как это происходит в Ефетовской σ-модели. Энергия Таулесса определяется *двухкуперонной* диаграммой [47], которая дает член в нульмерной σ-модели, индуцированный быстрыми модами. Оценивая вклад двухкуперонной петли, набирающийся с импульсов $m \sim g \ln g$, найдем, что соответствующий вклад в действие имеет порядок $\propto \varepsilon^2/(g \ln g)$. Таким образом, для эффективной энергии Таулесса получим (в размерных единицах):

$$\omega_{Th} = \omega_0 \sqrt{g \ln g} = \sqrt{(\omega_0/\tau) \ln(1/\omega_0 \tau)}. \tag{2.210}$$

Это выражение напоминает результат, полученный в работе [9], где также была обнаружена корневая зависимость энергии Таулесса от кондактанса в системе со смешанной сверхпроводимостью. В заключение, отметим, что рост эффективной энергии Таулесса с беспорядком связан с тем, что куперонная щель определяется не разложением $\mathbf{Str} \ln(\ldots)$, а квадратичным по P членом $\mathcal{S}_P$, дающим вклад в силу нелокальности рассматриваемой теории.

10. Обсуждение результатов

Иерархия масштабов

Обсудим физический смысл различных энергетических масштабов, возникающих в теории, и соотношения между ними. Наибольший масштаб — $\omega_0 b \simeq \omega_0 g \ln(N/g) \simeq \tau^{-1} \ln(\Delta\tau)$ — связан с числом уровней b, эффективно перемешанных беспорядком. Ему соответствует длина $\ell = b^{-1} \ll 1$, определяющая скорость затухания функции Грина (2.179) в x-пространстве. Величине ℓ можно дать следующую формальную интерпретацию, позволяющую более наглядно истолковать полученные результаты. Член четвертого порядка в действии (2.162) можно рассматривать, как описывающий рассеяние неких «квазичастиц» с импульсом $\mathbf{p} = p_F(\cos x, \sin x)$. Тогда ℓ формально соответствует длине рассеяния:

$$1/\ell \propto g \int dx\, \sigma(x) = g \ln(N/g), \tag{2.211}$$

где $\sigma(x)$ — дифференциальное сечение рассеяния при $x = x_1 - x_2 + \pi$. В рассматриваемой задаче рассеяние является сильно анизотропным: амплитуда рассеяния на малые углы оказывается очень большой (ср. с аналогичной ситуацией в [48]). Для такого сингулярного рассеяния, помимо длины ℓ, необходимо ввести транспортную длину рассеяния ℓ_{tr}:

$$1/\ell_{tr} \propto g \int dx\, \sigma(x)\,(1 - \cos x) = g. \tag{2.212}$$

Для корректного учета логарифмически расходящейся скорости рассеяния $1/\ell$ необходимо использовать самосогласованное борновское приближение для $\sigma(x)$, эквивалентное суммированию графиков с непересекающимися примесными линиями. При $\epsilon/\omega_0 \ll 1/\ell$ диаграммы с пересечениями оказываются малы по параметру $\ell/\ell_{tr} = 1/\ln(N/g)$, играющему роль обычного квазиклассического параметра $(k_F\ell_{tr})^{1-d}$ в нашей эффективно одномерной задаче.

Следующий энергетический масштаб — $\omega_0 g \ln g \simeq \tau^{-1}\ln(1/\omega_0\tau)$ — связан с куперонным пропагатором (2.135). Ему соответствует пространственный масштаб L, определяющий характерный размер угловых флуктуаций в σ-модели (2.206):

$$1/L = g \ln g. \tag{2.213}$$

Он аналогичен длине сбоя фазы куперона (или размеру системы) в задаче о слабой локализации. Масштаб L должен превосходить длину рассеяния ℓ. Только в этом случае при выводе σ-модели можно ограничиться наинизшим порядком в градиентном разложении по степеням $\partial U/\partial x$. Сравнивая с $\ell = [g\ln(N/g)]^{-1}$, приходим к выводу, что параметром градиентного разложения является отношение $\ell/L = \ln g/\ln(N/g)$, которое мало при выполнении неравенства (2.108). Таким образом, условие $\ell/L \ll 1$ означает, что наша задача существенно не баллистическая [49,50], хотя, формально, $l \gg \xi$. В то же время, она не является и диффузионной, т. к. $\ell_{tr}/L = \ln g \gg 1$.

Энергия Таулесса $\omega_{Th} \simeq \omega_0\sqrt{g\ln g} \simeq \sqrt{(\omega_0/\tau)\ln(1/\omega_0\tau)}$ определяет энергетический масштаб, ниже которого средняя плотность состояний определяется нульмерной σ-моделью, эквивалентной теории случайных матриц класса C. Средняя плотность состояний (2.78) испытывает осцилляции на масштабе межуровневого расстояния ω_0, что является наименьшим энергетическим масштабом в нашей задаче.

Таким образом, мы осуществили микроскопический вывод суперсимметричной теории поля для описания статистики электронов, локализованных в ядре вихря в умеренно чистом пределе. При выполнении условия $\tau^{-1} \ll \sqrt{\Delta\omega_0}/\ln(\Delta\tau)$ (что соответствует не очень сильному беспорядку) найдена парный коррелятор случайного потенциала (2.106) в одномеризованной задаче. Это же условие позволяет вывести суперматричную σ-модель (2.206), ограничиваясь первым членом в градиентном разложении. Несмотря на одномерный характер спектра существует квазиклассический параметр $\ln\Delta\tau \ll 1$, контролирующий точность седлового приближения. При энергиях ниже эффективной энергии Таулесса $\epsilon \leq \omega_{Th} = [(\omega_0/\tau)\ln(1/\omega_0\tau)]^{1/2}$ нульмерная σ-модель воспроизводит результаты феноменологического подхода Алтланда и Цирнбауера [10] для теории случайных матриц класса C. Высшие куперонные моды приводят к уменьшению средней (на масштабах, больших ω_0) плотности состояний на относительную величину $[2\ln(1/\omega_0\tau)]^{-1}$ в полосе энергий $\epsilon \leq \tau^{-1}\ln(1/\omega_0\tau)$, что связано с нарушением баланса между числом коммутирующих переменных в фермион-фермионном и бозон-бозонном секторах теории.

В процессе вычислений потенциал примесей считался гауссовым и δ-коррелированным. Такая модель применима в умеренно чистом пределе в случае, если примеси имеют малое по сравнению с атомным сечение рассеяния, что реализуется, например, в сверхпроводящем $NbSe_2$ (см. раздел 7 главы I).

Глава III.

АНТИЛОКАЛИЗАЦИЯ В ДВУМЕРНОМ ЭЛЕКТРОННОМ ГАЗЕ С КИРАЛЬНЫМ РАСЩЕПЛЕНИЕМ СПЕКТРА

С момента появления скейлинговой теории локализации [7] в 1979 г. считалось, что в двумерных электронных системах не может существовать перехода металл-диэлектрик, так как все состояния являются локализованными при произвольно слабом беспорядке. Однако, в недавних экспериментах на кремниевых полевых транзисторах высокой подвижности [12] отчетливо обнаружен переход металл-диэлектрик в нулевом магнитном поле, который наблюдается при изменении концентрации двумерных носителей n_s. При малых плотностях $n_s < n_c \simeq 10^{11}\text{см}^{-2}$ система является диэлектриком с экспоненциально растущим сопротивлением в пределе $T \to 0$, тогда как для значений n_s, больших критического, наблюдается резкое (на порядок величины) падение сопротивления при $T < 2\text{K}$.

Происхождение новой металлической фазы до сих пор не выяснено. Ясно, однако, что электрон-электронное взаимодействие должно играть важную роль, поскольку, благодаря малой величине критической концентрации n_c, кулоновское взаимодействие значительно превосходит кинетическую энергию. В точке перехода их отношение равно $r_s \simeq 10$ и уменьшается $\propto n_s^{-1/2}$ вглубь в металлической фазы. В течение последнего года было предложено несколько теоретических подходов к учету сильного кулоновского взаимодействия. Были предложены сценарии развития p-волновой [13], триплетной [14], анионной [15] сверхпроводимости, а также сверхпроводимости, возникающей из-за отрицательности диэлектрической функции [16].

Помимо сильного кулоновского взаимодействия кремниевые МДП-структуры характеризуются спин-орбитальным расщеплением спектра [51], являющимся следствием сильной асимметрии удерживающего потенциала $V(z)$ квантовой ямы. Соответствующий член в гамильтониане двумерной системы (так называемое взаимодействие Рашбы) имеет вид [52]

$$H_{SO} = \alpha[\boldsymbol{\sigma} \times \hat{\mathbf{p}}]. \tag{3.1}$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}$ — вектор матриц Паули, $\hat{\mathbf{p}}$ — двумерный оператор импульса, α — константа спин-орбитальной связи, измеряемая в единицах скорости, а $[\cdot \times \cdot]$

обозначает z-компоненту векторного произведения. Этот член снимает спиновое вырождение в нулевом магнитном поле и приводит к расщеплению спектра на две ветви, соответствующие разным киральностям:

$$\epsilon_{\pm}^{(0)}(p) = \frac{p^2}{2m} \pm \alpha p, \tag{3.2}$$

расщепление между которыми линейно растет с импульсом частицы p.

Для кремниевой МДП-структуры минимум спектра (3.2), $-\epsilon_0 = -m\alpha^2/2$, имеет масштаб 0.3K [53], в то время как энергия Ферми в точке перехода $\epsilon_F \simeq 6$K. Следовательно, отношение концентраций фермионов с левой и правой киральностями оказывается значительно больше единицы: $n_+/n_- = (\sqrt{\epsilon_F + \epsilon_0} + \sqrt{\epsilon_0})^2/(\sqrt{\epsilon_F + \epsilon_0} - \sqrt{\epsilon_0})^2 \simeq 2.5$. Таким образом, даже без учета кулоновского взаимодействия спин-орбитальное расщепление Рашбы приводит к глобальной перестройке спектра по сравнению с со спектром свободных частиц с гамильтонианом $\mathbf{p}^2/2m$. Это наблюдение может поставить под вопрос замечание Белица и Киркпатрика [14], что спин-орбитальное рассеяние является несущественным вследствие дальнодействующего характера кулоновского взаимодействия, т. к. последнее должно сильно модифицироваться в силу преобладания фермионов с одной киральностью.

Существенная роль спиновых корреляций была также продемонстрирована измерениями в магнитном поле [54]. Показано, что приложенное в плоскости двумерной системы магнитное поле подавляет металлическое состояние, приводя к резкому росту сопротивления. Измерения в перпендикулярном магнитном поле демонстрируют большое положительное магнитосопротивление при концентрациях $n_s > 2n_c$ и также свидетельствуют о спиновом происхождении проводящей фазы.

Таким образом, множество экспериментальных данных указывают на то, что понимание происхождения новой проводящей фазы, также как и самого перехода металл-диэлектрик, невозможно без учета сильного кирального расщепления. Поэтому, по нашему мнению, теория металической фазы должна быть теорией кулоновского взаимодействия киральных фермионов, рассеивающихся на случайном потенциале примесей. В качестве первого шага необходимо рассмотреть газ невзаимодействующих частиц с киральным расщеплением спектра в присутствии случайного потенциала.

В этой главе мы рассмотрим квантовую интерференционную поправку к проводимости двумерного невзаимодействующего электронного газа в присутствии взаимодействия Рашбы (3.1) и вычислим ее как функцию величины спин-орбитального расщепления. В задаче существуют три масштаба энергии: во-первых, это энергия Ферми ϵ_F, во-вторых, — киральное расщепление $\Delta = 2\alpha p_F$ между двумя ветвями (3.2) на уровне Ферми и в-третьих, это обратное время свободное пробега τ^{-1}, связанное с беспорядком. Мы будем считать, что ϵ_F является наибольшим масштабом:

$$\epsilon_F \gg \frac{1}{\tau}, \quad \epsilon_F \gg \Delta, \tag{3.3}$$

в то время как связь между Δ и τ^{-1} может быть произвольной, так что параметр

$$x = \Delta\tau, \tag{3.4}$$

определяющий относительную силу кирального расщепления, может меняться от 0 до ∞, при условии выполнения (3.3). Экспериментальная величина отношения Δ/ϵ_F оказывается порядка 1 в точке перехода, но убывает как n_s^{-1} вглубь металлической фазы. Значение параметра x слабо зависит от концентрации, оставаясь порядка 2 при изменении n_s от 10^{11}см$^{-2}$ до 3×10^{12}см$^{-2}$.

Как известно, спин-орбитальное рассеяние *на случайном потенциале* переводит систему в симплектический ансамбль с делокализационной квантовой поправкой к проводимости $\Delta\sigma_{\text{symp}} = (e^2/\pi h)\ln(L_\varphi/l)$ [55], где l — средняя длина пробега, $L_\varphi = (D\tau_\varphi)^{1/2}$ — длина сбоя фазы, связанная со временем релаксации фазы τ_φ, D — коэффициент диффузии (если длина сбоя фазы L_φ превосходит размер системы L, то во всех формулах нужно заменить L_φ на L). В случае взаимодействия Рашбы, SU(2) симметрия нарушается на уровне *регулярного гамильтониана*, в то время как потенциальное рассеяние можно считать независящим от спина. Ниже будет показано, что параметр x определяет кроссовер между ортогональным и симплектическим классами универсальности: поправка к проводимости становится антилокализационной при $x_* = (l/L_\varphi)^{1/3} \ll 1$ и выходит на $\Delta\sigma_{\text{symp}}$ при $x \geq 1$.

Эффекты слабой локализации в присутствии различных типов спин-орбитального расщепления, включая и расщепление Рашба, интенсивно изучались в работах [56]. Однако, авторы интересовались в основном поведением магнитосопротивления, хотя квантовая поправка в нулевом магнитном поле для случая сильно выраженного кирального расщепления, когда H_{SO} не может рассматриваться как малое возмущение, исследованы не были.

Мы рассматриваем газ двумерных невзаимодействующих электронов со спин-орбитальным взаимодействием Рашбы, описываемый гамильтонианом

$$H = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \alpha \hat{p}_y \sigma_x - \alpha \hat{p}_x \sigma_y + U(\mathbf{r}) \tag{3.5}$$

где $U(\mathbf{r})$ — случайный (не зависящий от спина) потенциал примесей, который для простоты предполагается гауссовым и δ-коррелированным: $\langle U(\mathbf{r})U(\mathbf{r}')\rangle = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')/2\pi\nu\tau$. Здесь $\nu = m/2\pi$ — плотность состояний свободного гамильтониана $\mathbf{p}^2/2m$.

Для δ-коррелированного случайного потенциала классическая проводимость не зависит от x и дается формулой Друде $\sigma_0 = ne^2\tau/m$. Первая квантовая поправка к проводимости [1] определяется выражением

$$\Delta\sigma = -\frac{e^2}{h}\frac{v_F^2}{2}\int \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2}\langle G^R(\mathbf{p})\rangle^{\rho\alpha}\langle G^R(-\mathbf{p})\rangle^{\lambda\sigma}\langle G^A(-\mathbf{p})\rangle^{\sigma\beta}\langle G^A(\mathbf{p})\rangle^{\mu\rho} \times$$
$$\times \int_{1/L_\varphi}^{1/l} \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} C^{\alpha\lambda}_{\beta\mu}(\mathbf{q}), \tag{3.6}$$

где $\langle G^{R,A}\rangle$ — усредненные по беспорядку запаздывающая и опережающая функции Грина, которые в рассматриваемой задаче недиагональны в спиновом пространстве, а статический куперонный пропагатор $C(\mathbf{q})$ определяется из лестничного уравнения

$$C^{\alpha\lambda}_{\beta\mu}(\mathbf{q}) = \frac{\delta^{\alpha\lambda}\delta^{\beta\mu}}{2\pi\nu\tau} + \frac{1}{2\pi\nu\tau}\int \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2}\langle G^R(\mathbf{p}+\frac{\mathbf{q}}{2})\rangle^{\alpha\alpha'}\langle G^A(-\mathbf{p}+\frac{\mathbf{q}}{2})\rangle^{\beta\beta'} C^{\alpha'\lambda}_{\beta'\mu}(\mathbf{q}). \tag{3.7}$$

При выводе выражения (3.6) предполагалась линейная связь между операторами импульса и скорости. При наличии взаимодействия Рашбы операторы скорости и импульса перестают быть пропорциональными: $\hat{v}_i = \hat{p}_i/m + \alpha\epsilon_{ij}\sigma_j$. Соответственно, должно быть изменено уравнение (3.6), однако поправка оказывается малой по параметру $\Delta/\epsilon_F \ll 1$.

Усредненная функция Грина подчиняется уравнению Дайсона $\langle G(\mathbf{p})\rangle^{-1} = G^{(0)}(\mathbf{p})^{-1} - \Sigma$, где $G^{(0)}(\mathbf{p})$ — функция Грина невозмущенного гамильтониана. В квазиклассическом пределе $\epsilon_F\tau \gg 1$ необходимо учитывать только диаграммы без пересечений примесных линий, что дает для собственно-энергетической части $\Sigma^{\alpha\beta}_{R,A} = \frac{1}{2\pi\nu\tau}\int\frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2}\langle G^{R,A}(\mathbf{p})\rangle^{\alpha\beta}$. Решая уравнение Дайсона, находим функцию Грина, которая вблизи полюсов может быть записана в виде ($\mathbf{n} = \mathbf{p}/p$)

$$\langle G^{R,A}(\mathbf{p})\rangle = \frac{-\xi(p) \pm \frac{i}{2\tau} + \frac{\Delta}{2}(n_y\sigma_x - n_x\sigma_y)}{\left(-\xi(p) - \frac{\Delta}{2} \pm \frac{i}{2\tau}\right)\left(-\xi(p) + \frac{\Delta}{2} \pm \frac{i}{2\tau}\right)}. \tag{3.8}$$

При выводе мы воспользовались неравенством $\Delta \ll \epsilon_F$ и заменили αp на $\Delta/2$. Времена релаксации для двух киральных ветвей оказываются равными и совпадают со средним временем свободного пробега τ, что является следствием модели с δ-коррелированным беспорядком. В более реалистичной модели с конечной длиной корреляции времена жизни для разных киральностей будут разными, но в пределе $\Delta \ll \epsilon_F$ разница останется малой.

Спиновая структура куперона определяется интегралом от запаздывающей и опережающей функций Грина:

$$I^{\alpha\alpha'}_{\beta\beta'}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi\nu\tau}\int \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2}\langle G^R(\mathbf{p}+\frac{\mathbf{q}}{2})\rangle^{\alpha\alpha'}\langle G^A(-\mathbf{p}+\frac{\mathbf{q}}{2})\rangle^{\beta\beta'}. \tag{3.9}$$

Куперонный пропагатор может быть записан в матричном виде как

$$\hat{C}(\mathbf{q}) = \frac{\hat{A}^{-1}(\mathbf{q})}{2\pi\nu\tau}, \tag{3.10}$$

где оператор $\hat{A}(\mathbf{q}) = \hat{\mathbf{1}} - \hat{I}(\mathbf{q})$. Вычислив $I(\mathbf{q})$ как функцию от x, разложив до второго порядка по ql, и введя полный спин куперона $\hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{\sigma}}^R + \hat{\boldsymbol{\sigma}}^A)$, получим

$$\begin{aligned}\hat{A}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2}q^2l^2 + x^2\left(\frac{1}{2(1+x^2)} - \frac{6+3x^2+x^4}{8(1+x^2)^3}q^2l^2\right)(\hat{\mathbf{S}}^2 - \hat{S}_z^2)\\ - \frac{x^2(6+3x^2+x^4)}{4(1+x^2)^3}(\mathbf{q}\times\hat{\mathbf{S}})^2l^2 - \frac{x}{(1+x^2)^2}(\mathbf{q}\times\hat{\mathbf{S}})l.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Следующим шагом необходимо обратить матрицу $\hat{A}$. Согласно (3.11), синглетная мода является бесщелевой, в то время как в триплетном секторе возникает щель, пропорциональная x. Рассмотрим сначала случай малых $x \ll 1$. Тогда, при $ql \gg x$ можно пренебречь спиновой структурой $\hat{A}$, так что $\hat{A}^{-1} = \frac{2}{q^2l^2}$. При $ql \leq x$ структура триплетного сектора обратного оператора $\hat{A}^{-1}$ усложняется, причем разные триплетные моды имеют разные щели, что является следствием низкой симметрии уравнения (3.11). Однако конкретные величины щелей несущественны при логарифмически расходящемся интегрировании по импульсу куперона. С учетом этого замечания мы можем условно записать

$$\hat{A}^{-1} \simeq \frac{2}{q^2l^2}\left(1 - \frac{\hat{\mathbf{S}}^2}{2}\right) + \frac{2}{q^2l^2+x^2}\frac{\hat{\mathbf{S}}^2}{2}. \tag{3.12}$$

Эта формула не является точной, однако она правильно передает логарифмически большие члены в q-интегрировании. Подставив (3.12) в (3.10) и выполнив интегрирование, получим

$$\int_{1/L_\varphi}^{1/l} \frac{d^2\mathbf{q}}{(2\pi)^2} C_{\beta\mu}^{\alpha\lambda}(\mathbf{q}) = \frac{1}{8\pi^2\nu v_F^2\tau^3}\left\{\left(\ln\frac{L_\varphi}{l}+3f\right)\delta^{\alpha\lambda}\delta^{\beta\mu} - \left(\ln\frac{L_\varphi}{l}-f\right)\sum_{i=1}^{3}\sigma_i^{\alpha\lambda}\sigma_i^{\beta\mu}\right\}, \tag{3.13}$$

где функция f описывает вклад триплетного сектора:

$$f\left(x, \frac{L_\varphi}{l}\right) = \begin{cases} \ln\frac{L_\varphi}{l} & \text{для } x \ll \frac{l}{L_\varphi}; \\ \ln\frac{1}{x} & \text{для } \frac{l}{L_\varphi} \ll x \ll 1; \\ O(1) & \text{для } x \gg 1. \end{cases} \tag{3.14}$$

Остается вычислить интеграл от четырех функций Грина в уравнении (3.6):

$$\int \frac{d^2\mathbf{p}}{(2\pi)^2}\langle G^A(\mathbf{p})\rangle^{\mu\rho}\langle G^R(\mathbf{p})\rangle^{\rho\alpha}\langle G^R(-\mathbf{p})\rangle^{\lambda\sigma}\langle G^A(-\mathbf{p})\rangle^{\sigma\beta} =$$
$$= \frac{4\pi\nu\tau^3}{1+x^2}\left[\left(1+\frac{x^2}{2}\right)\delta^{\mu\alpha}\delta^{\lambda\beta} - \frac{x^2}{4}\left(\sigma_x^{\mu\alpha}\sigma_x^{\lambda\beta}+\sigma_y^{\mu\alpha}\sigma_y^{\lambda\beta}\right)\right]. \tag{3.15}$$

При малых $x \ll 1$ этот интеграл диагонален в спиновом пространстве, однако имеет сложную структуру при $x \gg 1$, когда киральные ветви сильно разделены.

Наконец, подставляя выражения (3.13) и (3.15) в уравнение (3.6), после взятия следа по спиновым индексам получим итоговое выражение:

$$\Delta\sigma = \frac{1}{\pi}\frac{e^2}{h}\left\{\ln\frac{L_\varphi}{l} - \frac{3+x^2}{1+x^2}f\left(x, \frac{L_\varphi}{l}\right)\right\}. \tag{3.16}$$

Рассмотрим $\Delta\sigma$ как функцию x для заданного $L_\varphi \gg l$. При $x \ll l/L_\varphi$ можно пренебречь спиновым расщеплением, и мы получаем поправку ортогонального класса универсальности $\Delta\sigma_{\mathrm{orth}}$, которая может быть представлена в виде суммы локализующего вклада триплетного и антилокализующего вклада синглетного сектора. Далее, при $l/L_\varphi \ll x$ спектр триплетных мод становится щелевым, что уменьшает их вклад, в результате чего полная поправка меняет знак и становится антилокализующей при

$$x_* = \left(\frac{l}{L_\varphi}\right)^{1/3}. \tag{3.17}$$

При $x \gg x_*$ антилокализация становится более выраженной, достигая $\Delta\sigma_{\mathrm{symp}}$ при $x \geq 1$. Стоит отметить, что вклад бесщелевой синглетной моды не зависит от величины кирального расщепления x, в то время как вклад триплетного канала дополнительно подавляется фактором $\frac{3+x^2}{1+x^2}$, что происходит вследствие специальной спиновой структуры интеграла (3.15) от четырех функций Грина.

Приведем выражения для $\Delta\sigma$ в разных предельных случаях:

$$\Delta\sigma = \frac{1}{\pi}\frac{e^2}{h} \times \begin{cases} -2\ln\frac{L_\varphi}{l} & \text{для } x \ll \frac{l}{L_\varphi}; \\ \ln\left(\frac{L_\varphi}{l}x^3\right) & \text{для } \frac{l}{L_\varphi} \ll x \ll 1; \\ \ln\frac{L_\varphi}{l} & \text{для } x \gg 1. \end{cases} \tag{3.18}$$

Таким образом, несмотря на то, что в рассматриваемой задаче симметрия по отношению к повороту спина нарушается на уровне регулярного гамильтониана, ее поведение похоже на поведение электронного газа со спин-орбитальным рассеянием на случайном потенциале [55]. При увеличении силы спин-орбитального взаимодействия система переходит от ортогонального к симплектическому классу универсальности, что связано с полным нарушением $SU(2)$ симметрии по отношению к повороту спина. Такое поведение следует сравнить со специфическим случаем спин-орбитального взаимодействия, когда гамильтониан зависит только от одной из матриц Паули. Как показали Лянда-Геллер и Мирлин [57], в этом случае $SU(2)$ симметрия нарушается не полностью, а до $U(1)$, что приводит к исчезновению первой квантовой поправки к проводимости.

Итак, мы вычислили квантовую интерференционную поправку к проводимости невзаимодействующих фермионов в присутствии спин-орбитального взаимодействия Рашбы. При слабом киральном расщеплении $x \sim x_*$, поправка меняет знак и становится антилокализационной. Она достигает симплектического универсального значения $\Delta\sigma_{\rm symp}$, в пределе большого расщепления, когда рассеяние между различными киральностями сильно подавлено. Данная работа может рассматриваться как шаг к построению теории проводящей фазы в кремниевых полевых транзисторах, которая, по всей вероятности, является теорией кулоновского взаимодействия киральных фермионов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перечислим основные результаты работы.

1. Предложен новый механизм диссипации энергии в смешанном состоянии умеренно чистых сверхпроводников, связанный с неадиабатическими переходами между электронными состояниями, локализованными в ядре вихря. Вычислена продольная проводимость в режиме течения потока в пределе малой температуры и скорости движения вихрей. Показано, что зеркальная симметрия уравнений Боголюбова-Де Жена проявляется в нелинейности вольт-амперной характеристики.

2. Изучена статистика состояний в ядре вихря в умеренно чистом пределе. Микроскопически выведена нелинейная суперматричная σ-модель, описывающая мезоскопические флуктуации плотности состояний вблизи энергии Ферми. Показано, что нульмерная σ-модель, имеющая место при $\epsilon \ll \omega_{Th}$, дает для средней плотности состояний выражение, функциональная форма которого совпадает с результатом теории случайных матриц для класса C. Определена эффективная энергия Таулесса $\omega_{Th} \simeq \sqrt{(\omega_0/\tau)\ln(1/\omega_0\tau)}$. Показано, что высшие гармоники σ-модели приводят к увеличению среднего расстояния между уровнями на относительную величину порядка $1/\ln(1/\omega_0\tau)$.

3. Вычислена квантовая интерференционная поправка к проводимости двумерного электронного газа при наличии спин-орбитального взаимодействия Рашбы как функция силы взаимодействия. Обнаружен переход от ортогональному к симплектическому классу универсальности при увеличении расщепления между киральными ветвями спектра.

Основное содержание диссертации изложено в следующих работах:

[1] М. А. Скворцов, М. В. Фейгельман, “Низкотемпературная динамика вихрей в слоистых сверхпроводниках: новый пример параметрической статистики уровней” (тезисы доклада на семинаре в ИФП им. П.Л. Капицы РАН «Мезоскопические и сильнокоррелированные системы», УФН **166**, 906 (1996).

[2] M. V. Feigel'man and M. A. Skvortsov, “Anomalous flux-flow dynamics in layered type-II superconductors at low temperatutes”, Phys. Rev. Lett. **78**, 2640 (1997).

[3] M. A. Skvortsov, V. E. Kravtsov and M. V. Feigel'man, “Level statistics inside the core of a superconductive vortex”, препринт LANDAU-98-TMP-2, cond-mat/9805296.

[4] M. A. Skvortsov, “Weak antilocalization in a 2D electron gas with the chiral splitting of the spectrum”, Письма в ЖЭТФ, **66**, 118 (1998).

Я глубоко благодарен своему научному руководителю М. В. Фейгельману за постоянное внимание и поддержку в работе, В. Е. Кравцову, проведшему меня через дебри суперсимметричной σ-модели, В. М. Пудалову за идею главы III, а также сотрудникам ИТФ им. Л. Д. Ландау, обсуждение с которыми помогло решить многие из вопросов работы. Я признателен своей жене, М. О. Дороховой, за помощь в подготовке диссертации.

ПРИЛОЖЕНИЯ

А. Используемые обозначения

При работе с суперматрицами мы следуем обозначениям Ефетова [5]. Операция взятия суперследа определена согласно $\operatorname{str} A = \operatorname{Tr} A_{ff} - \operatorname{Tr} A_{bb}$. Матрица k, действующая в пространстве ферми-бозе (FB), дается выражением

$$k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{fb}. \tag{А1}$$

Через σ_i обозначены матрицы Паули в пространстве частица-дырка (PH); τ_i — матрицы Паули в пространстве Намбу.

След матрицы по пространству Намбу обозначается с помощью $\operatorname{tr} A$; след по пространствам FB, PH и Намбу обозначается с помощью $\operatorname{Str} A \equiv \operatorname{str}\operatorname{tr} A$. Для полного следа оператора, включающего также след по координатному пространству, используется обозначение $\mathbf{Str}\, A$.

Б. Спектр локализованных состояний

Представим собственные функции уравнения Боголюбова – Де Жена (2.1) в виде

$$\Psi(\mathbf{r}) = f(r)e^{i\mu\varphi}; \qquad f(r) = \begin{pmatrix} f_+(r) \\ f_-(r) \end{pmatrix}, \tag{Б1}$$

выделив явную зависимость от азимутального угла. Тогда уравнение (2.1) сведется к системе уравнений

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\left(\mu \mp \frac{1}{2}\right)^2 + k_F^2 \pm \frac{2m\epsilon}{\hbar^2}\right] f_\pm \mp \Delta(r) f_\mp = 0. \tag{Б2}$$

Выделим быстро осциллирующую зависимость от r

$$f_\pm = g_\pm H_{\mu\mp 1/2}(k_F r) \tag{Б3}$$

и получим уравнение на огибающую волновой функции:

$$\mp \frac{\hbar^2}{m}\frac{\partial}{\partial r}\ln H_{\mu\mp 1/2}(k_F r)\frac{\partial}{\partial r} g_\pm + \Delta(r)\frac{H_{\mu\pm 1/2}(k_F r)}{H_{\mu\mp 1/2}(k_F r)} g_\mp = \epsilon g_\pm. \tag{Б4}$$

Определим функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\kappa(x)$, $\eta(x)$, обращающиеся в нуль при $x \to \infty$.

$$\frac{\partial}{\partial r} H_{\mu\mp 1/2}(k_F r) = ik_F + \alpha(k_F r) \pm \beta(k_F r), \tag{Б5}$$

$$\frac{H_{\mu\pm 1/2}(k_F r)}{H_{\mu\mp 1/2}(k_F r)} = \mp i + \kappa(k_F r) \pm \eta(k_F r), \tag{Б6}$$

где явно выделены ведущие члены асимптотики функции Ганкеля. Таким образом, уравнение (Б4) сводится к задаче на собственные значения $\tilde{\mathcal{H}} g = \epsilon g$ с гамильтонианом

$$\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}}_0 + \tilde{\mathcal{H}}_1, \tag{Б7}$$

где

$$\tilde{\mathcal{H}}_0 = -i\hbar v_F \frac{\partial}{\partial r}\tau_z + \Delta\tau_y + \frac{\mu\Delta}{k_F r}\tau_x, \tag{Б8}$$

$$\tilde{\mathcal{H}}_1 = -\frac{\hbar^2}{m}[\alpha(k_F r)\tau_z + \beta(k_F r)]\frac{\partial}{\partial r} + [\kappa(k_F r)\tau_x + i\eta(k_F r)\tau_y]\Delta(r). \tag{Б9}$$

В нулевом приближении можно пренебречь членом $\tilde{\mathcal{H}}_1$. Единственным состоянием гамильтониана $\tilde{\mathcal{H}}_0$ с $\epsilon \ll \Delta$ является состояние $\epsilon = 0$ с волновой функцией

$$g^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-K(r)}; \qquad K(r) = \frac{1}{\hbar v_F}\int_0^r \Delta(r')dr'. \tag{Б10}$$

Спектр состояний киральной ветви дается в первом порядке теории возмущений формулой

$$\epsilon_\mu = \frac{\langle g^{(0)}|\tilde{\mathcal{H}}_1|g^{(0)}\rangle}{\langle g^{(0)}|g^{(0)}\rangle}. \tag{Б11}$$

Используя определения функций $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\kappa(x)$, $\eta(x)$ и точное свойство функций Ганкеля

$$\frac{1}{k_F}\beta + \kappa = \frac{1}{2}\left(\frac{H_{\mu-1/2} - H'_{\mu+1/2}}{H_{\mu+1/2}} + \frac{H_{\mu+1/2} + H'_{\mu-1/2}}{H_{\mu-1/2}}\right) \equiv \frac{\mu}{k_F r}, \tag{Б12}$$

приходим к выражениям (2.9), (2.10).

Учитывая, что волновая функция должна быть конечной при $r = 0$, находим, что она определяется действительной частью f и дается выражением (2.13).

В. Интегрирование по полю ψ

Общая формула

Вычислим гауссов интеграл

$$\mathcal{Z}_0(M) = \int \exp\left(-\psi_0^+ M\psi_0\right) D\psi_0 \tag{B1}$$

по супервекторам

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\phi\\ \phi^*\end{pmatrix}, \tag{B2}$$

где $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\zeta_1, \ldots, \zeta_n, z_1, \ldots, z_n)^T$, $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ и $z_1, \ldots, z_n$ — грассмановы и обычные комплексные числа соответственно, M — произвольная суперматрица $4n \times 4n$, и мера интегрирования дается выражением $D\psi_0 = \prod_i d\zeta_i^* d\zeta_i \frac{dz_i^* dz_i}{\pi}$. Будем называть ϕ и ϕ^* частичным и дырочным блоками. ψ_0 является вектором в трех пространствах: индексном пространстве $1, \ldots, n$, ферми-бозе (FB) пространстве и пространстве частица-дырка (PH). Вектора ψ_0 и ψ_0^* линейно зависимы:

$$\psi_0^* = s_0\psi_0, \tag{B3}$$

где матрица s_0 имеет вид

$$s_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -k & 0\end{pmatrix}_{ph}. \tag{B4}$$

Заметим, что если бы мы рассматривали интеграл (B1) по ϕ, а не по ψ_0, то результат был бы равен $\mathcal{Z}_0(M) = \mathrm{Sdet}\, M$ [5]. Для вычисления интеграла от $\mathcal{Z}_0(M)$ по супервекторам ψ_0, рассмотрим величину $\mathcal{Z}_0^2(M)$, которая может быть представлена в виде интеграла

$$\mathcal{Z}_0^2(M) = \int \exp\left(-\Psi^+ \mathcal{M}\Psi\right) D\Psi \tag{B5}$$

по $8n$-компонентным супервекторам

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\,\{\zeta_k\ \ \zeta_k^*\}\ \ \{z_k\ \ z_k^*\}\ \ \{\tau_k\ \ \tau_k^*\}\ \ \{t_k\ \ t_k^*\}\,\Big)^T, \tag{B6}$$

где

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} M & 0\\ 0 & M\end{pmatrix}. \tag{B7}$$

Введем $4n$ величин

$$\chi_k = \frac{\zeta_k + i\tau_k}{\sqrt{2}}, \quad \eta_k = \frac{\zeta_k^* + i\tau_k^*}{\sqrt{2}}, \quad u_k = \frac{z_k + it_k}{\sqrt{2}}, \quad v_k = \frac{z_k^* + it_k^*}{\sqrt{2}} \tag{B8}$$

и составим из них супервектор согласно

$$F = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(\{\chi_k \ \ \eta_k\} \ \ \{u_k \ \ v_k\} \ \ \{\chi_k^* \ \ \eta_k^*\} \ \ \{u_k^* \ \ v_k^*\} \Big)^T = T^+ \Psi, \tag{B9}$$

где

$$T^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ s_0 & -is_0 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1}_n. \tag{B10}$$

Интеграл (B5) можно записать через супервектор F в виде

$$\mathcal{Z}_0^2(M) = \int \exp\left(-F^+ \hat{\mathcal{M}} F\right) DF, \tag{B11}$$

где

$$\hat{\mathcal{M}} = T^+ \mathcal{M} T = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & s_0 M s_0^T \end{pmatrix}. \tag{B12}$$

Далее, заметим, что

$$F^+ \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} F = f^+ \left(M + N^T \right) f, \tag{B13}$$

где

$$f = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(\{\chi_k \ \ \eta_k\} \ \ \{u_k \ \ v_k\} \Big)^T. \tag{B14}$$

Уравнение (B13) выражает интеграл (B11) по супервекторам F через интеграл по обычным супервекторам f, что позволяет воспользоваться известной формулой (см. [5]), приводящей к ответу

$$\mathcal{Z}_0(M) = \mathrm{Sdet}^{1/2} \left(M + s_0 M^T s_0^T \right). \tag{B15}$$

Применение к задаче в координатном пространстве

Для того, чтобы получить выражение (2.31), необходимо вычислить интеграл

$$\mathcal{Z}(\mathcal{A}) = \int \exp\left(i \bar{\psi} \mathcal{A} \psi\right) D\psi, \tag{B16}$$

где супервектор ψ определен в уравнении (2.21), и $\bar{\psi} = \psi^+ \sigma_z \tau_z = (C\psi)^T$ (матрица C определена в уравнении (2.26)). (B16) выражается через интеграл (B1) по ψ_0, если записать

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ i\tau_y \phi^* \end{pmatrix} = V\psi_0, \qquad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i\tau_y \end{pmatrix}. \tag{B17}$$

Применяя результат (B15), найдем

$$\mathcal{Z}(\mathcal{A}) = \mathcal{Z}_0(V^T\sigma_z\tau_z\mathcal{A}V) = \exp\frac{1}{2}\operatorname{Str}\ln\left(V^T\sigma_z\tau_z\mathcal{A}V + s_0V^T\mathcal{A}^T\sigma_z\tau_zVs_0^T\right). \tag{B18}$$

Используя свойство суперследа, равенство $Vs_0V^T = S$ и определение (2.26) матрицы C, перепишем $\operatorname{Str}\ln(\ldots)$ в виде

$$\operatorname{Str}\ln(\mathcal{A} + \sigma_z\tau_zVs_0V^T\mathcal{A}^T\sigma_z\tau_zVs_0^TV^T) = \operatorname{Str}\ln(\mathcal{A} + C\mathcal{A}^T[\sigma_z\tau_zC\sigma_z\tau_z]^T). \tag{B19}$$

Наконец, используя равенство $\sigma_z\tau_zC\sigma_z\tau_z = C$ и определение зарядового сопряжения (2.25), получим

$$\mathcal{Z}(\mathcal{A}) = \exp\frac{1}{2}\operatorname{Str}\ln\hat{\mathcal{P}}\mathcal{A}, \tag{B20}$$

где оператор проектирования $\hat{\mathcal{P}}$ определен в уравнении (2.32).

Применение к задаче в матричном представлении

Вычислим гауссов интеграл (B16) по суперполям $\psi(x)$, определенным в уравнении (2.151), где оператор $\mathcal{A}$ дается выражением (2.170). Используя результат (B15), выражая $\psi(x)$ через ψ_0 и следуя логике вычисления этого интеграла в координатном пространстве, получим

$$\mathcal{Z}(\mathcal{A}) = \exp\frac{1}{2}\operatorname{Str}\ln(\mathcal{A} + \mathcal{C}^*\mathcal{A}^T[\sigma_z\mathcal{C}\sigma_z]^T). \tag{B21}$$

Однако, в отличие от рассмотрения в координатном пространстве, матрица $\mathcal{C}$ удовлетворяет теперь уравнению $\sigma_z\mathcal{C}\sigma_z = -\mathcal{C}$. Применяя определение зарядового сопряжения (2.25), получим формально то же уравнение (B20), где проектор дается выражением (2.173).

Г. Диагональная функция Грина

Вычислим диагональную функцию Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, задаваемую уравнением (2.36), при $\epsilon = 0$. В отсутствие беспорядка (т. е. при $P = 0$) матричная функция Грина (2.15) имеет вид

$$\mathcal{G}^0 = \sum_\mu \frac{|\mu\rangle\langle\mu|}{i\delta\sigma_z - \mu\omega_0}. \qquad (\Gamma 1)$$

В приближении среднего поля $P(\mathbf{r})$ не зависит от азимутального угла φ. Следовательно, член, содержащий P, в уравнении (2.36) диагонален в базисе чистых состояний $|\mu\rangle$, и функция Грина может быть записана в виде

$$\mathcal{G} = \sum_\mu \frac{|\mu\rangle\langle\mu|}{\frac{i}{2\tau}\langle\mu|\tau_z P|\mu\rangle + i\delta\sigma_z - \mu\omega_0}. \qquad (\Gamma 2)$$

Мнимая часть знаменателя функции Грина отражает тот факт, что в присутствии беспорядка состояние с определенным угловым моментом μ не является собственным состоянием гамильтониана и распадается в суперпозицию состояний с различными угловыми моментами.

Среднее $\langle\mu|\tau_z P|\mu\rangle$ определяется большими $r \sim \xi$, что позволяет воспользоваться асимптотическим выражением для функций Бесселя:

$$\langle\mu|\tau_z P|\mu\rangle = \frac{4A^2}{k_F}\int_0^\infty dr e^{-2K(r)} \begin{pmatrix} \cos(k_F r - \pi\mu/2) \\ \sin(k_F r - \pi\mu/2) \end{pmatrix} \tau_z P(r) \begin{pmatrix} \cos(k_F r - \pi\mu/2) \\ \sin(k_F r - \pi\mu/2) \end{pmatrix}^T. \qquad (\Gamma 3)$$

Т. к. $P(r)$ — медленно меняющаяся функция, то можно усреднить тригонометрические функции, осциллирующие на длине волны электрона. В результате, $\langle\mu|\tau_z P|\mu\rangle$ оказывается не зависящим от μ при $\mu \ll N$ и дается выражением

$$\langle\tau_z P\rangle = \frac{2A^2}{k_F}\int_0^\infty \operatorname{tr}[\tau_z P(r)]e^{-2K(r)}dr = \frac{\int_0^\infty \operatorname{tr}[\tau_z P(r)]e^{-2K(r)}dr}{2\int_0^\infty e^{-2K(r)}dr}. \qquad (\Gamma 4)$$

Мы ищем функцию Грина $G(\mathbf{r},\mathbf{r})$, соответствующую седловому решению P, диагональному во всех пространствах, кроме пространства Намбу. $\langle\tau_z P\rangle$ является диагональной матрицей 4×4 в FB и PH пространствах; абсолютное значение ее элементов оказывается равным, а знаки определятся аналитическими свойствами функции Грина. Удобно ввести скаляр

$$b = \frac{\langle\tau_z P\rangle}{2\omega_0\tau}\sigma_z, \qquad (\Gamma 5)$$

так что

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}) = -\frac{A^2 e^{-2K(r)}}{\omega_0}\sum_\mu \frac{\begin{pmatrix} J^2_{\mu-1/2}(k_F r) & J_{\mu-1/2}(k_F r)J_{\mu+1/2}(k_F r) \\ J_{\mu-1/2}(k_F r)J_{\mu+1/2}(k_F r) & J^2_{\mu+1/2}(k_F r) \end{pmatrix}}{\mu - ib\sigma_z}. \qquad (\Gamma 6)$$

Сумма по μ вычисляется с помощью соотношений [44] (a считается положительным):

$$\sum_\mu \frac{J^2_{\mu\mp 1/2}(x)}{\mu - ia} = i\int_0^\infty dt e^{-t(a\pm i/2)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m^2(x) e^{-imt}$$
$$= i\int_0^\infty dt e^{-t(a\pm i/2)} J_0\left(2x\sin\frac{t}{2}\right); \qquad (\Gamma 7)$$

$$\sum_\mu \frac{J_{\mu-1/2}(x)J_{\mu+1/2}(x)}{\mu - ia} = i\int_0^\infty dt e^{-t(a+i/2)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x)J_{m+1}(x) e^{-imt}$$
$$= \int_0^\infty dt e^{-t(a+i/2)} J_1\left(2x\left|\sin\frac{t}{2}\right|\right). \qquad (\Gamma 8)$$

В умеренно чистом пределе $b \gg 1$, так что интеграл набирается с малых t порядка $1/b \ll 1$. В этом пределе интегралы (Г7), (Г8) легко вычисляются [44]:

$$\sum_\mu \frac{J^2_{\mu\mp 1/2}(x)}{\mu - ib\sigma_z} = \frac{i\sigma_z}{\sqrt{x^2+b^2}}, \qquad (\Gamma 9)$$
$$\sum_\mu \frac{J_{\mu-1/2}(x)J_{\mu+1/2}(x)}{\mu - ib\sigma_z} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{b}{\sqrt{x^2+b^2}}\right). \qquad (\Gamma 10)$$

Подставляя уравнения (Г9) и (Г10) в (Г6) и определяя r_0 согласно

$$k_F r_0 = b, \qquad (\Gamma 11)$$

приходим к выражению (2.37).

Д. Вычисление березиниана

Согласно уравнению (2.70), dl^2 может быть представлена в виде суммы трех членов. Рассмотрим их по очереди. Первый из них, $\mathrm{str}\, dQ_0^2$, отличен от нуля только в FF секторе (ср. (2.64)):

$$(dQ_0)_{FF} = \begin{pmatrix} -\sin\theta\, d\theta & -ie^{i\varphi}(\cos\theta\, d\theta + i\sin\theta\, d\varphi) \\ ie^{-i\varphi}(\cos\theta\, d\theta - i\sin\theta\, d\varphi) & \sin\theta\, d\theta \end{pmatrix}_{ph}, \qquad (Д1)$$

$$(dQ_0^2)_{FF} = \begin{pmatrix} d\theta^2 + \cos^2\theta\, d\varphi^2 & \cdots \\ \cdots & d\theta^2 + \cos^2\theta\, d\varphi^2 \end{pmatrix}_{ph}. \qquad (Д2)$$

Так что

$$\operatorname{str} dQ_0^2 = 2\left(d\theta^2 + \cos^2\theta\, d\varphi^2\right). \tag{Д3}$$

Для вычисления остальных членов в уравнении (2.70) необходимо найти δU в уравнении (2.71):

$$\delta U = \begin{pmatrix} \delta u & 0 \\ 0 & \delta v \end{pmatrix}_{ph}, \tag{Д4}$$

где

$$\delta u = u^{-1} du = \begin{pmatrix} \Omega & d\zeta \\ d\eta & \Omega \end{pmatrix}_{fb}, \quad \delta v = v^{-1} dv = \begin{pmatrix} \Omega & -d\eta \\ d\zeta & \Omega \end{pmatrix}_{fb}, \tag{Д5}$$

а $\Omega = \frac{1}{2}(d\eta\, \zeta - \eta\, d\zeta)$.

Рассмотрим второй член в уравнении (2.70), $\operatorname{str}[\delta U, Q_0]^2$:

$$\Xi = [\delta U, Q_0] = \begin{pmatrix} \delta u (Q_0)_{pp} - (Q_0)_{pp}\delta u & \delta u (Q_0)_{ph} - (Q_0)_{ph}\delta v \\ \delta v (Q_0)_{hp} - (Q_0)_{hp}\delta u & \delta v (Q_0)_{hh} - (Q_0)_{hh}\delta v \end{pmatrix}_{ph} \tag{Д6}$$

В явном виде элементы Ξ имеют вид

$$\Xi_{pp} = (1-\cos\theta)\begin{pmatrix} 0 & d\zeta \\ -d\eta & 0 \end{pmatrix}_{fb}, \qquad \Xi_{ph} = -ie^{i\varphi}\sin\theta \begin{pmatrix} 0 & d\eta \\ d\eta & 0 \end{pmatrix}_{fb}, \tag{Д7}$$

$$\Xi_{hp} = ie^{-i\varphi}\sin\theta \begin{pmatrix} 0 & -d\zeta \\ d\zeta & 0 \end{pmatrix}_{fb}, \qquad \Xi_{hh} = (1-\cos\theta)\begin{pmatrix} 0 & d\eta \\ d\zeta & 0 \end{pmatrix}_{fb}. \tag{Д8}$$

Далее,

$$\operatorname{str}\Xi^2 = \operatorname{str}\left[\Xi_{pp}^2 + \Xi_{ph}\Xi_{hp} + \Xi_{hp}\Xi_{ph} + \Xi_{hh}^2\right]. \tag{Д9}$$

Используя (Д7)–(Д8), найдем

$$\Xi_{pp}^2 = \Xi_{hh}^2 = (1-\cos\theta)^2 \begin{pmatrix} d\eta\, d\zeta & 0 \\ 0 & -d\eta\, d\zeta \end{pmatrix}_{fb}, \tag{Д10}$$

$$\Xi_{ph}\Xi_{hp} = \Xi_{hp}\Xi_{ph} = \sin^2\theta \begin{pmatrix} d\eta\, d\zeta & 0 \\ 0 & -d\eta\, d\zeta \end{pmatrix}_{fb}. \tag{Д11}$$

Подставляя уравнения (Д10) и (Д11) в уравнение (Д9), получим

$$\operatorname{str}[\delta U, Q_0]^2 = \operatorname{str}\Xi^2 = 4\left[(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta\right] d\eta\, d\zeta = 8(1-\cos\theta) d\eta\, d\zeta. \tag{Д12}$$

Наконец, рассмотрим последний член в уравнении (2.70), $2\,\mathrm{str}\,\delta U[Q_0, dQ_0]$. Коммутатор $[Q_0, dQ_0]$ имеет ненулевые элементы только в FF секторе:

$$[Q_0, dQ_0]_{FF} = \begin{pmatrix} 2i\sin^2\theta\, d\varphi & \cdots \\ \cdots & -2i\sin^2\theta\, d\varphi \end{pmatrix}_{ph} \tag{Д13}$$

Используя выражение (Д4), получим

$$\mathrm{str}\,\delta U[Q_0, dQ_0] = \mathrm{str}\,\delta U_{FF}[Q_0, dQ_0]_{FF} = \Omega\,\mathrm{str}[Q_0, dQ_0]_{FF} = 0 \tag{Д14}$$

В результате, объединяя уравнения (Д3), (Д12) и (Д14), приходим к уравнению (2.72).

E. Вычисление парного коррелятора (2.100) в пределе $b \ll \sqrt{N}$

В этом приложении мы выполним интегрирование по направлениям, нормальным к плоскостям II и III, определенным в уравнениях (2.103) и (2.104), и сведем парный коррелятор к сумме проекторов на соответствующие плоскости.

Рассмотрим сначала вклад от плоскости II. При условии медленности изменения поля $\Phi(x)$ мы можем заменить (2.100) выражением

$$\mathcal{W}_{\mathrm{II}}(x_1, x_2, x_3, x_4) \simeq \frac{A^4}{\nu\tau\omega_0^2}\cdot 4\sin^2\frac{x_1 - x_2}{2}\cdot\delta(x_1 - x_4)\delta(x_2 - x_3)(2\pi)^2 t(x_1, x_2), \tag{E1}$$

где $t(x_1, x_2)$ — результат интегрирования по нормальным направлениям:

$$t(x_1, x_2) = \iint\frac{dz_3dz_4}{(2\pi)^2}\int_0^\infty rdre^{-4K(r)}J_0(k_F r\sqrt{Y(x_1, x_2, x_2 + z_3, x_1 + z_4)}). \tag{E2}$$

Разложим $Y(x_1, x_2, x_2 + z_3, x_1 + z_4)$ по z_3 и z_4:

$$Y(x_1, x_2, x_2 + z_3, x_1 + z_4) = z_3^2 - 2\cos(x_1 - x_2)z_3z_4 + z_4^2 + \ldots \tag{E3}$$

и приведем эту квадратичную форму к сумме квадратов

$$Y = \sin^2\frac{x_1 - x_2}{2}\cdot u^2 + \cos^2\frac{x_1 - x_2}{2}\cdot v^2, \tag{E4}$$

где $z_3 = (u + v)/2$, $z_4 = (u - v)/2$.

Вводя новые переменные согласно $\xi = |\sin(x_1 - x_2)/2|\,u$, $\eta = |\cos(x_1 - x_2)/2|\,v$ и выполняя угловое интегрирование в плоскости (ξ, η), получим

$$\begin{aligned} t(x_1, x_2) &= \frac{1}{|\sin(x_1 - x_2)|}\iint\frac{d\xi d\eta}{(2\pi)^2}\int_0^\infty rdre^{-4K(r)}J_0(k_F r\sqrt{\xi^2 + \eta^2}) \\ &= \frac{1}{2\pi|\sin(x_1 - x_2)|}\int_0^\infty\rho d\rho\int_0^\infty rdre^{-4K(r)}J_0(k_F r\rho). \end{aligned} \tag{E5}$$

Удобнее сначала выполнить интегрирование по ρ. Интеграл формально расходится, так что необходимо ввести конечное затухание $e^{-\alpha\rho}$ и устремить $\alpha \to 0$ в окончательном выражении. Тогда интеграл по ρ легко вычисляется:

$$\int_0^\infty \rho d\rho J_0(k_F r\rho)e^{-\alpha\rho} = \frac{\alpha}{[\alpha^2 + (k_F r)^2]^{3/2}}, \tag{E6}$$

после чего интегрирование по r становится тривиальным и не зависящим от профиля $K(r)$:

$$\int_0^\infty rdre^{-4K(r)} \frac{\alpha}{[\alpha^2 + (k_F r)^2]^{3/2}} = \frac{1}{k_F^2}\int_0^\infty \frac{sds}{[1+s^2]^{3/2}} = \frac{1}{k_F^2}. \tag{E7}$$

Таким образом, вклад от плоскости II в парный коррелятор описывается слагаемым

$$\mathcal{W}_{\rm II}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{g}{2}\left|\mathrm{tg}\,\frac{x_1-x_2}{2}\right|(2\pi)^2\delta(x_1-x_4)\delta(x_2-x_3), \tag{E8}$$

где константа связи g определена в уравнении (2.41). Отметим, что коррелятор не зависит от полного числа локализованных уровней N, что связано с независимостью интеграла (E7) от $K(r)$.

Обратимся теперь к вычислению вклада от плоскости III. Аналогично уравнению (E1),

$$\mathcal{W}_{\rm III}(x_1,x_2,x_3,x_4) \simeq$$
$$\simeq \frac{A^4}{\nu\tau\omega_0^2}(-4)e^{i(x_1-x_2)}\sin^2\frac{x_1-x_2}{2}\cdot\delta(x_1-x_3+\pi)\delta(x_2-x_4+\pi)(2\pi)^2\tilde{t}(x_1,x_2), \tag{E9}$$

где

$$\tilde{t}(x_1,x_2) = \iint\frac{dz_3dz_4}{(2\pi)^2}\int_0^\infty rdre^{-4K(r)}J_0(k_F r\sqrt{Y(x_1,x_2,x_1+\pi+z_3,x_2+\pi+z_4)}). \tag{E10}$$

Принимая во внимание, что $Y(x_1,x_2,x_1+\pi+z_3,x_2+\pi+z_4) = Y(x_1,x_2,x_2+z_4,x_1+z_3)$, находим, что $\tilde{t}(x_1,x_2) = t(x_1,x_2)$.

Итак, вклад от плоскости III оказывается равным

$$\mathcal{W}_{\rm III}(x_1,x_2,x_3,x_4) = -\frac{g}{2}e^{i(x_1-x_2)}\left|\mathrm{tg}\,\frac{x_1-x_2}{2}\right|(2\pi)^2\delta(x_1-x_3+\pi)\delta(x_2-x_4+\pi). \tag{E11}$$

Выражения (E8) и (E11) становятся сингулярными при $x_2-x_1=\pi$. Рассмотрим подробнее, что происходит вблизи $x_2-x_1=\pi$, где $\mathcal{W}$ имеет степенную расходимость $|x_1 - x_2 - \pi|^{-1}$. Особенность связана с вырожденностью квадратичной формы (E4) при $x_2 = x_1 + \pi$. Эта форма вырождена также при $x_1 = x_2$. Однако, при $x_1 = x_2$, сингулярность $t(x_1, x_2)$ компенсируется множителем $\sin^2[(x_1 - x_2)/2]$. Такое сокращение связано с тем, что линия $x_1 = x_2$ на плоскости II (III) является линией ее пересечения с плоскостью I, тогда как вклад от последней пренебрежимо мал в пределе $N \to \infty$.

На линии $x_2 = x_1 + \pi$ косинус в (E4), определяющий квадратичную жесткость в нормальном v-направлении, обращается в нуль. В то же время интеграл по u быстро сходится, что позволяет положить $u = 0$ в дальнейшем рассуждении. «Опасная» линия $x_2 = x_1 + \pi$ является линией пересечения плоскостей II и III (см. уравнения (2.103) и (2.104)). Таким образом, расстояние между точками (x_1, x_2, x_2, x_1) и $(x_1, x_2, x_1 + \pi, x_2 + \pi)$ обращается в нуль линейно по

$$\delta \equiv x_2 - x_1 - \pi. \tag{E12}$$

Для определения характерного масштаба $\delta x_\perp$ интегрирования по v при малых $\delta = 0$ необходимо удержать высшие члены разложения по v в уравнении (E4). При $u = 0$ ряд Тейлора начинается с

$$Y = \cos^2 \frac{x_1 - x_2}{2} \cdot v^2 + \frac{\sin(x_1 - x_2)}{4} \cdot v^3 + \left(\frac{1}{16} - \frac{7}{48} \cos^2 \frac{x_1 - x_2}{2}\right) v^4 + \cdots. \tag{E13}$$

Раскладывая также по степеням δ, запишем

$$Y = \frac{v^2 \delta^2}{4} + \frac{v^3 \delta}{4} + \frac{v^4}{16} + \cdots. \tag{E14}$$

Интегрирование по r в формуле (2.100) приводит к экспоненциально малому результату, если $Y \gg 1/N^2$, следовательно, характерное $\delta x_\perp$ можно оценить как

$$\delta x_\perp(\delta) \sim \frac{1}{N\delta + \sqrt{N}}. \tag{E15}$$

Это выражение определяет характерный масштаб $\delta_* \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$. При $\delta > \delta_*$ высшие степени v в уравнении (E14) оказываются несущественными, и воспроизводится результат (E8), (E11). С другой стороны, при $\delta < \delta_*$, интегрирование по v определяется конечными $v \sim \delta x_\perp(0) \sim 1/\sqrt{N}$, так что в этом пределе тангенс должен быть заменен на $\mathrm{tg}(\pi + \delta_*)/2 \sim \sqrt{N}$.

Отметим, что N входит в выражение для парного коррелятора только посредством обрезки расходящегося тангенса. Выполняя преобразование Фурье к исходному μ-представлению, найдем, что это приводит к слабой ($\log N$) зависимости коррелятора $\langle V_{\mu_1\mu_2} V_{\mu_3\mu_4} \rangle$ от числа локализованных уровней (см. уравнение (2.110)).

Комбинируя уравнения (E8) и (E11) с учетом правильной обрезки тангенса при δ_*, получим результат (2.105).

Ж. Свойства ядра T

Рассмотрим фурье-компоненты ядра $T(x)$, определенного в уравнении (2.106):

$$\mathcal{T}(m) = \int_0^{2\pi} T(x) e^{imx} \frac{dx}{2\pi} = \int_0^{2\pi} T(x) \cos(mx) \frac{dx}{2\pi}. \tag{Ж1}$$

Нулевая компонента оказывается логарифмически большой:

$$\mathcal{T}(0) = \int_0^{2\pi} T(x) \frac{dx}{2\pi} = \ln \sqrt{N}. \tag{Ж2}$$

Грубая оценка для $\mathcal{T}(m)$ при $m < \sqrt{N}$ дает

$$\mathcal{T}(m) \simeq \ln \frac{\sqrt{N}}{|m|}. \tag{Ж3}$$

Уточним эту оценку для четных гармоник, для чего изучим разность

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(2n) - \mathcal{T}(2(n+1)) &= 2 \int_0^{\pi/2} \sin 2(2n+1)y \sin 2y \operatorname{ctg} y \, dy \\ &= 2 \int_0^{\pi/4} \sin 2(2n+1)y \sin 2y [\operatorname{tg} y + \operatorname{ctg} y] \, dy = \frac{2}{2n+1}. \end{aligned} \tag{Ж4}$$

В результате, найдем

$$\mathcal{T}(0) - \mathcal{T}(2n) = 2 \sum_{k=0}^{|n|-1} \frac{1}{2k+1}, \tag{Ж5}$$

что сводится к (Ж3) при больших n.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. П. Горьков, А. И. Ларкин, Д. Е. Хмельницкий, Письма в ЖЭТФ **30**, 248 (1979); P. W. Anderson, E. Abrahams, and T. V. Ramakrishnan, Phys. Rev. Lett. **43**, 718 (1979).

[2] E. Wigner, Ann. Math. **53**, 46 (1951); F. J. Dyson, J. Math. Phys. **3**, 140, 157, 166, 1199 (1962).

[3] M. L. Mehta, *Random Matrices*, Acad. Press, 1991.

[4] Л. П. Горьков, Г. М. Элиашберг, ЖЭТФ **48**, 1407 (1965).

[5] K. B. Efetov, Adv. Phys. **32**, 53 (1983); *Supersymmetry in Disorder and Chaos*, Cambridge Univ. Press, New York (1997).

[6] B. D. Simons and B. L. Altshuler, Phys. Rev. **B 48**, 5422 (1993).

[7] E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishnan, Phys. Rev. Lett. **42**, 673 (1979).

[8] C. W. J. Beenakker, Rev. Mod. Phys. **69**, 731 (1997); J. Lambert and R. Raimondi, cond-mat/9708056.

[9] A. Altland, B. Simons and D. Taras-Semchuk, Письма в ЖЭТФ **67**, 21 (1998).

[10] A. Altland and M. R. Zirnbauer, Phys. Rev. **B 55**, 1142 (1997).

[11] C. Caroli, P. G. De Gennes and J. Matricon, Phys. Lett. **9**, 307 (1964).

[12] S. V. Kravchenko, G. V. Kravchenko, J. E. Furneaux, V. M. Pudalov, and M. D'Iorio, Phys. Rev. B **50**, 8039 (1994); S. V. Kravchenko, W. E. Mason, G. E. Bowker, J. E. Furneaux, V. M. Pudalov, and M. D'Iorio, Phys. Rev. B **51**, 7038 (1995); S. V. Kravchenko, D. Simonian, M. P. Sarachik, W. Mason, and J. E. Furneaux, Phys. Rev. Lett. **77**, 4938 (1996).

[13] P. Phillips, Y. Wan, I. Martin, S. Knysh, and D. Dalidovich, cond-mat/9709168.

[14] D. Belitz and T. R. Kirkpatrick, cond-mat/9705023.

[15] F. C. Zhang and T. M. Rice, cond-mat/9708050.

[16] P. Phillips, Y. Wan, cond-mat/9704200.

[17] J. Bardeen and M. Steven, Phys. Rev. **140**, A1197 (1965).

[18] P. Nozieres and W. F. Vinen, Phil. Mag. **14**, 667 (1967).

[19] Н. Б. Копнин и В. Е. Кравцов, Письма в ЖЭТФ **23**, 631 (1976); ЖЭТФ **71**, 1644 (1976).

[20] N. B. Kopnin and M. M. Salomaa, Phys. Rev. **B 44**, 9667 (1991).

[21] M. V. Feigel'man *et al*, Письма в ЖЭТФ **62**, 811 (1995).

[22] A. van Otterlo *et al*, Phys. Rev. Lett. **75**, 3736 (1995).

[23] А. И. Ларкин и Ю. Н. Овчинников, ЖЭТФ **73**, 299 (1977).

[24] A. I. Larkin and Yu. N. Ovchinnikov, Phys. Rev. B **57**, 5457 (1998).

[25] A. I. Larkin and A. A. Koulakov, cond-mat/9802002.

[26] B. D. Simons, P. A. Lee and B. L. Altshuler, Nucl. Phys. **B409**, 487 (1993).

[27] M. Wilkinson, J. Phys. A: Math. Gen. **21**, 4021 (1988).

[28] M. Wilkinson, Phys. Rev. **A 41**, 4645 (1990); M. Wilkinson and E. J. Austin, Phys. Rev. **A 46**, 64 (1992).

[29] А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, *Методы квантовой теории поля в статистической физике*, М.: Физматлит, 1962.

[30] G. Blatter *et al*, Rev. Mod. Phys. **66**, 1125 (1994).

[31] А. И. Ларкин и Ю. Н. Овчинников, ЖЭТФ **68**, 1915 (1975).

[32] S. Bhattacharya, Physica **C 257**, 232 (1996).

[33] G. Blatter and D. A. Browne, Phys. Rev. **B 37**, 3856 (1988);

[34] E. Shimshoni and Yu. Gefen, Ann. Phys. **210**, 16 (1991).

[35] F. Zhou, P. Charlat, B. Spivak and B. Pannetier, cond-mat/9707056.

[36] K. M. Frahm, P. W. Brouwer, J. A. Melsen, C. W. J. Beenakker, Phys. Rev. Lett., **76**, 2981 (1996).

[37] П. Де Жен, *Сверхпроводимость металлов и сплавов*, М.: Мир, 1967.

[38] Г. Е. Воловик, Письма в ЖЭТФ **57**, 233 (1993).

[39] Г. Е. Воловик, ЖЭТФ **104**, 3070 (1993).

[40] J. J. M. Verbaarschot, H. A. Weidenmüller, and M. R. Zirnbauer, Phys. Rep. **129**, 367 (1985).

[41] A. V. Andreev, B. D. Simons, N. Taniguchi, Nucl. Phys. **B 432** [FS], 487 (1994).

[42] M. R. Zirnbauer, Nucl. Phys. **B 265** [FS15], 375 (1986).

[43] A. V. Andreev, B. L. Altshuler, Phys. Rev. Lett. **75**, 902 (1995).

[44] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, М.: Физматлит, 1963.

[45] В. Л. Березинский, ЖЭТФ **65**, 1251 (1973).

[46] К. Б. Ефетов, А. И. Ларкин, ЖЭТФ **85**, 764 (1983).

[47] V. E. Kravtsov and A. D. Mirlin, Письма в ЖЭТФ **60**, 645 (1994).

[48] A. G. Aronov, A. D. Mirlin and P. Wölfle, Phys. Rev. B **49**, 16609 (1994).

[49] B. A. Muzykantskii and D. E. Khmelnitskii, Письма в ЖЭТФ **62**, 68 (1995).

[50] O. Agam, B. L. Altshuler, and A. V. Andreev, Phys. Rev. Lett. **75**, 4389 (1995).

[51] В. М. Пудалов, Письма в ЖЭТФ **66**, 168 (1997).

[52] Е. И. Рашба, ФТТ **1**, 407 (1959); Ю. А. Бычков и Е. И. Рашба, Письма в ЖЭТФ **39**, 66 (1984).

[53] В. М. Пудалов, частное сообщение.

[54] В. М. Пудалов, Г. Брунталер, А. Принц, Г. Бауер, Письма в ЖЭТФ **65**, 887 (1997); D. Simonian, S. V. Kravchenko, M. P. Sarachik, and V. M. Pudalov, Phys. Rev. Lett. **79**, 2304 (1997).

[55] S. Hikami, A. I. Larkin, Y. Nagaoka, Progr. Theor. Phys. **63**, 707 (1980); S. Hikami, *ibid* **64**, 1425 (1980).

[56] W. Knap *et. al*, Phys. Rev. B **53**, 3912 (1996); С. В. Иорданский, Ю. Б. Лянда-Геллер и Г. Е. Пикус, Письма в ЖЭТФ **60**, 199 (1994); V. M. Edelstein, J. Phys.: Condens. Matter **7**, 1 (1995).

[57] Yu. B. Lyanda-Geller and A. D. Mirlin, Phys. Rev. Lett. **72**, 1894 (1994).